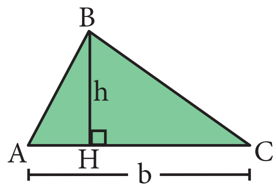
Materiales Educativos GRATIS

GEOMETRIA QUINTO

ÁREA DE REGIONES TRIANGULARES

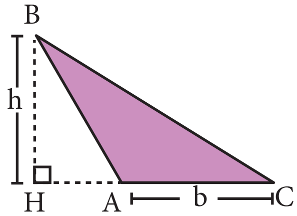
a) Fórmula básica



$$A_{\Delta ABC} = \frac{b \cdot h}{2}$$

$\overline{BH}$: altura relativa $\overline{AC}$.

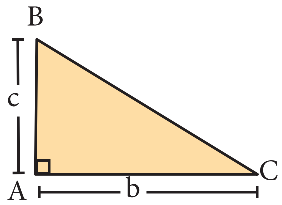
b) En un triángulo obtusángulo



$$A_{\Delta ABC} = \frac{b \cdot h}{2}$$

$\overline{BH}$: altura relativa $\overline{AC}$.

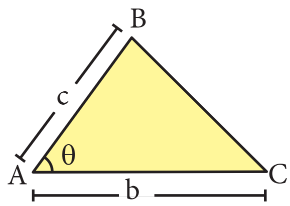
c) En un triángulo rectángulo



$$A_{\Delta ABC} = \frac{b \cdot c}{2}$$

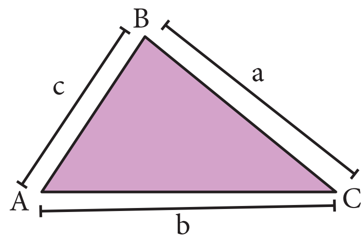
$\overline{AB}$ y $\overline{AC}$: catetos

d) Fórmula trigonométrica



$$A_{\Delta ABC} = \frac{b \cdot c}{2} \operatorname{Sen}\theta$$

e) Fórmula de Herón

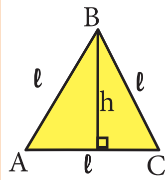


En el ΔABC: $p = \dfrac{a + b + c}{2}$

p: semiperímetro de la región triangular ABC.

$$A_{\Delta ABC} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

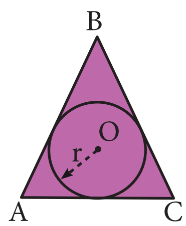
Observación:
En un triángulo equilátero



$$A_{\Delta ABC} = \frac{\ell^2\sqrt{3}}{4} = \frac{h^2\sqrt{3}}{3}$$

ℓ: AB = BC = AD: lado del triángulo equilátero
h: altura

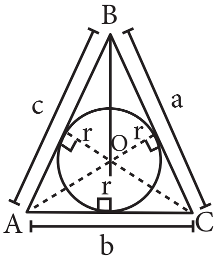
f) En función del inradio



$$A_{\Delta ABC} = p \times r$$

p → semiperímetro
r → inradio

Demostración:



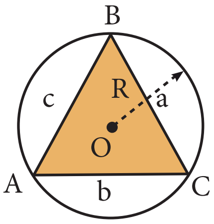
$$S_{\Delta ABC} = S_{\Delta BOC} + S_{\Delta AOC} + S_{\Delta AOB}$$

$$S_{\Delta ABC} = \frac{a \cdot r}{2} + \frac{b \cdot r}{2} + \frac{c \cdot r}{2}$$

$$S_{\Delta ABC} = r\left(\frac{a+b+c}{2}\right)$$

$$S_{\Delta ABC} = p \cdot r$$

g) En función del circunradio



$$\boxed{A_{\Delta ABC} = \frac{abc}{4R}}$$

R: circunradio

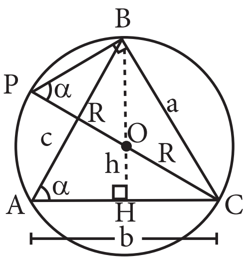
Demostración:

$⊿PBC \sim ⊿AHB$

$\frac{a}{h} = \frac{2R}{c} \Rightarrow \frac{ac}{2R} = h$

Luego:

$$A_{\Delta ABC} = \frac{b \cdot h}{2}$$



$$A_{\Delta ABC} = \frac{b}{2} \cdot \frac{(ac)}{2R}$$

$$\therefore A_{\Delta ABC} = \frac{abc}{4R}$$

Con los exradios

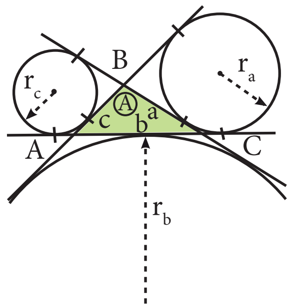
$A = (p - a)r_a$

$A = (p - b)r_b$

$A = (p - c)r_c$

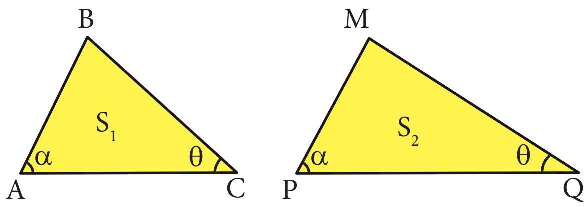
$$A = \sqrt{r \cdot r_a \cdot r_b \cdot r_c}$$

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c}$$



r: inradio del triángulo ABC

- Si $\Delta_{ABC} \sim \Delta PMQ$

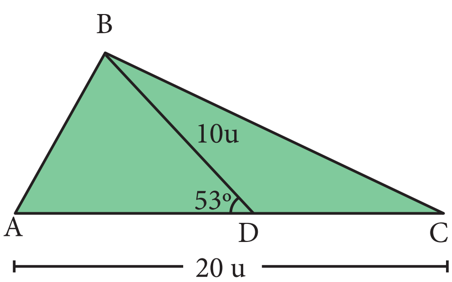


$$\Rightarrow \frac{S_1}{S_2} = \frac{BC^2}{MQ^2} = \frac{AB^2}{PM^2} = \frac{AC^2}{PQ^2}$$

Trabajando en clase

Integral

1. Calcula el área de la región triangular ABC.

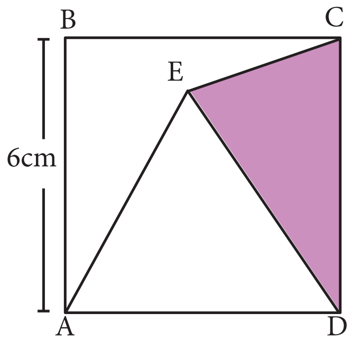


2. Calcula el área de la región triangular cuyos lados miden 8 u, 5 u y 11 u.

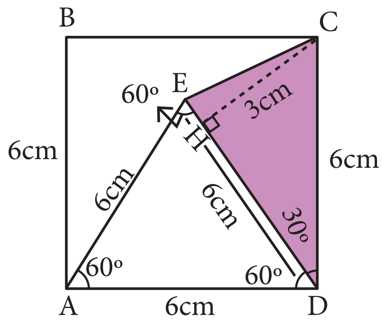
3. Dos lados de un triángulo miden 1,5 m y 2 m, si el área de su región es máxima. Calcula su perímetro.

PUCP

4. Calcula el área de la región sombreada, si ABCD es un cuadrado y AED es un triángulo equilátero.



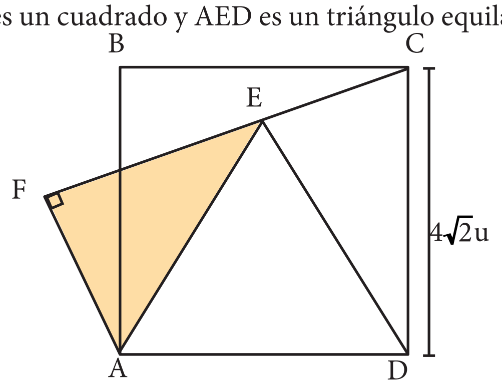
Resolución:



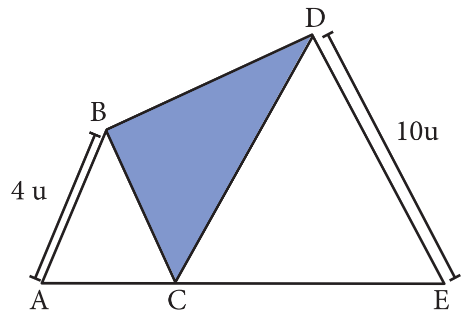
ABCD es cuadrado, entonces:
AB = BC = CD = AD = 6 cm
AED es un triángulo equilátero, entonces:
AE = ED = AD = 6 cm
m∠ADE = m∠EAD = m∠AED = 60º
⇒ m∠EDC = 30º
Trazamos la altura $\overline{CH}$, luego:
Triángulo DHC (30º y 60º)
⇒ CH = 3 cm
Finalmente: S(área)

$$S = \frac{\cancel{6}^{3} \times 3}{\cancel{2}} = 9\ cm^2$$

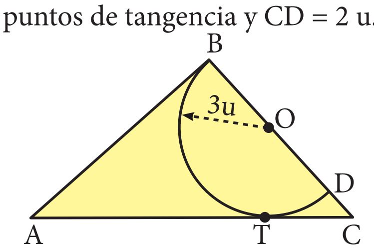
5. Calcula el área de la región sombreada, si ABCD es un cuadrado y AED es un triángulo equilátero.



6. Calcula el área de la región sombreada, si ABC y CDE son triángulos equiláteros.

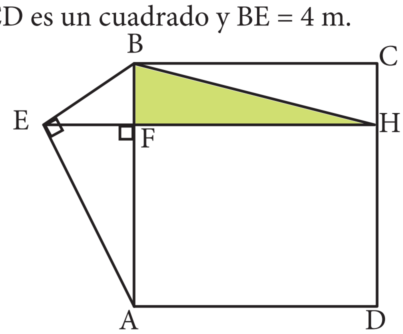


7. Calcula el área de la región triangular ABC, si T y B son puntos de tangencia y CD = 2 u.

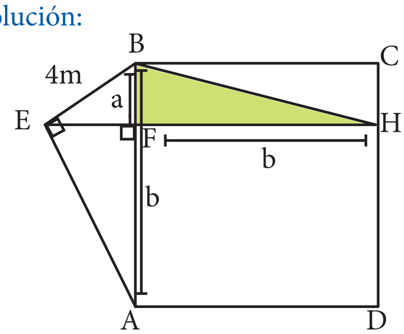


UNMSM

8. Calcula el área de la región triangular BFH, si ABCD es un cuadrado y BE = 4 m.



Resolución:



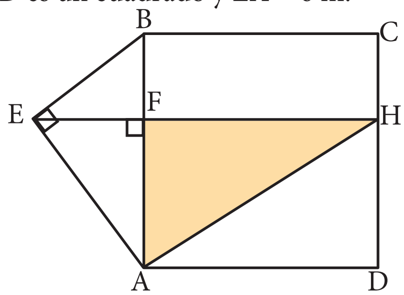
Sea: BF = a y AB = b
Relaciones métricas $4^2 = ab$ … (1)
También: AB = AD = FH = b

$$\Rightarrow S_{BFH} = \frac{b \times a}{2} \ \ldots (2)$$

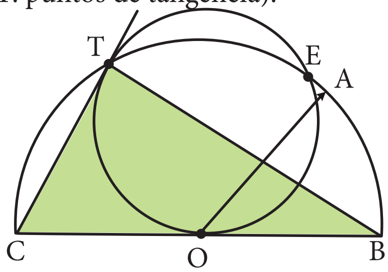
Reemplazando (1) en (2)

$$S_{BFH} = \frac{4^2}{2} = 8\ m^2$$

9. Calcula el área de la región triangular AFH, si ABCD es un cuadrado y EA = 6 m.



10. Calcula el área de la región sombreada, si: OA = 4 u. (O y T: puntos de tangencia).



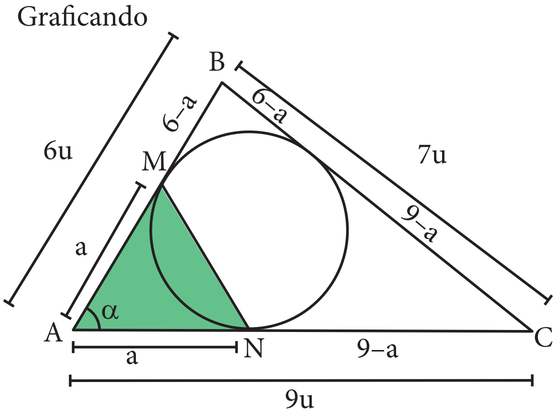
11. En un triángulo ABC, se traza la altura $\overline{BH}$, tal que m∠ABH = 2m∠HBC; 2(AH) = 5(HC) y AB = 6 u. calcula el área de la región triangular BHC.

UNI

12. En un triángulo ABC, AB = 6 u, BC = 7 u y AC = 9 u, la circunferencia inscrita es tangente en M y N con $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$, respectivamente. Calcula el área de la región triangular AMN.

Resolución:

Graficando



- Sea: AM = a ⇒ AN = a y α: medida del ∠BAC.
- Relacionamos:

$$\frac{S_{AMN}}{S_{ABC}} = \frac{a \times a\ \cancel{Sen\alpha}}{6 \times 9\ \cancel{Sen\alpha}} = \frac{a^2}{54} \ldots (1)$$

- Se tiene que: BC = 7 u = 6 u –a + 9u – a

  a = 4 u
- Además:

$$S_{ABC} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$S_{ABC} = \sqrt{11 \times 5 \times 4 \times 2}$$

$$S_{ABC} = 2\sqrt{110}\ u^2$$

Semiperímetro:

$$P = \frac{6+7+9}{2}$$

p = 11 u

Reemplazando en (1):

$$\frac{S_{AMN}}{2\sqrt{110}} = \frac{16}{54}$$

$$S_{AMN} = \frac{16}{27}\sqrt{110}\ u^2$$

13. En un triángulo ABC; AB = 8 u, BC = 5 u y AC = 11 u, la circunferencia inscrita es tangente en M y N con $\overline{AC}$ y $\overline{BC}$, respectivamente. Calcula el área de la región triangular CMN.

14. El área de la región limitada por un triángulo rectángulo ABC recto en B, es 32 u². Exteriormente se dibujan los triángulos equiláteros AEB y BCF. Si el área de la región triangular EBF es k veces el área de la región triangular ABC, calcula el valor de k.

UNI 2008-II