Materiales Educativos GRATIS

ÁNGULO DOBLE

El objeto de estas igualdades es expresar razones trigonométricas del ángulo doble (2α; 2θ; ...; $2x$) en términos de las razones trigonométricas del ángulo simple (α, θ, ... x); estas igualdades serán válidas para todos los valores admisibles de sus variables.

Identidades fundamentales

$$\text{Sen}2x = 2\text{Sen}x\ \text{Cos}x\ \forall\ x \in \mathbb{R}$$

$$\text{Cos}2x = \text{Cos}^2x - \text{Sen}^2x\ \forall\ x \in \mathbb{R}$$

$$\text{Tan}2x = \frac{2\text{Tan}x}{1 - \text{Tan}^2x}\quad \forall\ x \neq \left\{(2n+1)\frac{\pi}{4}; (2n+1)\frac{\pi}{2}\right\}\ n \in \mathbb{Z}$$

Demostración de las identidades fundamentales

- Demostración de $\text{Sen}2x = 2\text{Sen}x\text{Cos}x$

  Sabemos lo siguiente:

  $\text{Sen}(\alpha + \theta) = \text{Sen}\alpha\text{Cos}\theta + \text{Sen}\theta\text{Cos}\alpha$

  Operando: $\alpha = x \wedge \theta = x$

  Obtenemos:

  $\text{Sen}\underbrace{(x + x)}_{2x} = \text{Sen}x\ \text{Cos}x + \text{Cos}x\text{Sen}x$

  $\text{Sen}2x = 2\text{Sen}x\ \text{Cos}x$

- Demostración de $\text{Cos}2x = \text{Cos}^2x - \text{Sen}^2x$

  Sabemos lo siguiente:

  $\text{Cos}(\alpha + \theta) = \text{Cos}\alpha\text{Cos}\theta - \text{Sen}\alpha\text{Sen}\theta$

  Operando: $\alpha = x \wedge \theta = x$

  Obtiene:

  $\text{Cos}\underbrace{(x + x)}_{2x} = \text{Cos}x\ \text{Cos}x - \text{Sen}x\text{Sen}x$

  $$\therefore\ \text{Cos}2x = \text{Cos}^2x - \text{Sen}^2x$$

- Demostración de $\text{Tan}2x = \dfrac{2\text{Tan}x}{1 - \text{Tan}^2x}$

  Sabemos: $\text{Tan}(\alpha + \theta) = \dfrac{\text{Tan}\alpha + \text{Tan}\theta}{1 - \text{Tan}\alpha\text{Tan}\theta}$

  Operando: $x = x \wedge \theta = x$

  Obtenemos: $\text{Tan}(x + x) =$

  $$\text{Tan}2x = \text{Tan}\underbrace{(x + x)}_{2x} = \frac{\text{Tan}x + \text{Tan}x}{1 - \text{Tan}x\text{Tan}x}$$

  $$\text{Tan}2x = \frac{2\text{Tan}x}{1 - \text{Tan}^2x}$$

Advertencia pre

Con la ayuda de la identidad $\text{Sen}^2x + \text{Cos}^2x = 1$ se puede expresar el coseno del ángulo doble (Cos2x), ya sea en función del seno o del coseno del ángulo simple (Senx o Cosx), para ello procederemos del siguiente modo:

- Sabemos que $\text{Cos}2x = \text{Cos}^2x - \text{Sen}^2x$

  Pero $\text{Cos}^2x = 1 - \text{Sen}^2x$

  $\Rightarrow \text{Cos}2x = (1 - \text{Sen}^2x) - \text{Sen}^2x$

  $$\boxed{\therefore\ \text{Cos}2x = 1 - 2\text{Sen}^2x}$$

- Sabemos que: $\text{Cos}2x = \text{Cos}^2x - \text{Sen}^2x$

  Pero $\text{Sen}^2x = 1 - \text{Cos}^2x$

  $\Rightarrow \text{Cos}2x = \text{Cos}^2x - (1 - \text{Cos}^2x)$

  $$\boxed{\therefore\ \text{Cos}2x = 2\text{Cos}^2x - 1}$$

Trabajando en clase

Integral

1. Calcula el valor de:

$$L = 2Sen15^{\circ}Cos15^{\circ} + \frac{2Tan22{,}5^{\circ}}{1 - Tan^2 22{,}5},$$

2. Reduce:

$$Cos^2 4\theta - Sen^2 4\theta + 2Sen5\theta \cdot Cos5\theta - Cos8\theta$$

3. Indica el valor de «x», si se cumple:

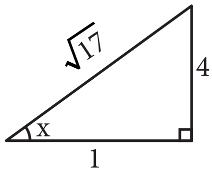
$$\frac{Sen2x}{Cosx} = 1 \wedge x \in \langle 0^{\circ}; 90^{\circ}\rangle$$

PUCP

4. Si Tanx = 4 (x: agudo), calcula Cos2x.

Resolución:

$$Tanx = \frac{4}{1}$$



Piden: $Cos2x = Cos^2x - Sen^2x$

$$Cos2x = \left(\frac{1}{\sqrt{17}}\right)^2 - \left(\frac{4}{\sqrt{17}}\right)^2$$

$$Cos2x = \frac{-15}{17}$$

5. Si Tanx = 0,3333... (x: agudo), calcula Sen2x.

6. Si $Sen\theta + Cos\theta = 1{,}2$. Calcula $Sen2\theta$

7. Reduce:

$$E = Cosx(Cosx + Secx) - Senx(Senx + Cscx)$$

UNMSM

8. Si: $Sen^4x + Cos^4x = A - BSen^D(Cx)$

Calcula: $\sqrt{A + B \cdot C + D}$

Resolución:

$$Sen^4x + Cos^4x = 1 - 2Sen^2x \cdot Cos^2x$$

$$Sen^4x + Cos^4x = 1 - 2\left(\frac{2SenxCosx}{2}\right)^2$$

$$Sen^4x + Cos^4x = 1 - 2\left(\frac{Sen2x}{2}\right)^2$$

$$Sen^4x + Cos^4x = 1 - \frac{1}{2}Sen^2(2x)$$

$\rightarrow$ A = 1

$$B = \frac{1}{2}$$

C = 2

D = 2

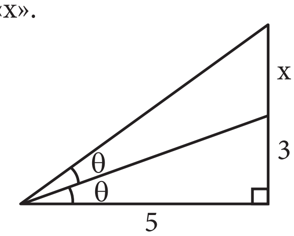
Piden: $\sqrt{1 + \frac{1}{2} \cdot 2 + 2} = 2$

9. Si: $Sen^6x + Cos^6x = E - FSen^G(Hx)$

Calcula: $\sqrt{E + (G + H)F}$

10. Si Tanx = 5, calcula Cot2x.

11. Calcula «x».



UNI

12. Señala el máximo valor de:

$$D = Sen\theta \cdot Cos\theta \cdot Cos2\theta \cdot Cos4\theta \cdot Cos8\theta$$

Resolución:

$$2D = \underbrace{2Sen\theta \cdot Cos\theta}\cdot Cos2\theta \cdot Cos4\theta \cdot Cos8\theta$$

$$2D = Sen2\theta \cdot Cos2\theta \cdot Cos4\theta \cdot Cos8\theta$$

$$4D = \underbrace{2Sen2\theta \cdot Cos2\theta}\cdot Cos4\theta \cdot Cos8\theta$$

$$4D = Sen4\theta \cdot Cos4\theta \cdot Cos8\theta$$

$$8D = 2Sen4\theta \cdot Cos4\theta \cdot Cos8\theta$$

$$8D = Sen8\theta \cdot Cos8\theta$$

$$16D = \underbrace{2Sen8\theta \cdot Cos8\theta}$$

$$16D = Sen16\theta$$

$$D = \frac{Sen16\theta}{16}$$

$$D_{máx.} = \frac{(Sen16\theta)_{máx.}}{16} = \frac{1}{16}$$

13. Calcula el mínimo valor de:

$$M = 7Senx \cdot Cosx \cdot Cos2x \cdot Cos4x$$

14. Determinaa $Tan\theta$.