



# VALOR ABSOLUTO

### I. Definición

Sea  $a \in \mathbb{R}$ , el valor absoluto se denota por  $|a|$  el cual se define por

$$|a| = \begin{cases} a; & a \geq 0 \\ -a; & a < 0 \end{cases}$$

Ejemplos:

- $|2| = 2$
- $|-2| = -(-2) = 2$

### II. Propiedades:

1. El valor absoluto de todo número real siempre es un número no negativo.

$$|a| \geq 0$$

2. El valor absoluto de todo número real siempre es igual al valor absoluto de su opuesto.

$$|a| = |-a|$$

### Nota

- Generalizando

$$|a + b| = |-a - b|; |a - b| = |b - a|$$

3. El valor absoluto de la multiplicación de dos números reales es igual a la multiplicación de los valores absolutos de los números en mención.

$$|ab| = |a| |b|$$

Ejemplos:

- $|3(x - 4)| = 3|x - 4|$
- $2|x + 2| = |2x + 4|$
- $-2|x + 2| = -|2x + 4|$

4. El valor absoluto de la división de dos números reales (divisor diferente de cero) es igual a la división de los valores absolutos.

$$\left| \frac{a}{b} \right| = \frac{|a|}{|b|}; b \neq 0$$

Ejemplos:

$$\bullet \frac{|x + 1|}{3} = \left| \frac{x + 1}{3} \right|$$

$$\bullet \frac{|x + 2|}{-3} = -\left| \frac{x + 2}{3} \right|$$

5. Todo número al cuadrado, siempre es igual al valor absoluto de la base elevado al cuadrado

$$a^2 = |a|^2$$

6. La raíz cuadrada de todo número elevado al cuadrado, siempre es igual al valor absoluto del número.

$$\sqrt{a^2} = |a|$$

### Advertencia pre

#### Recuerda:

Teoría de exponentes

Números reales

$$\sqrt{x^2} = x$$

$$\sqrt{x^2} = |x|$$

$$x \geq 0$$

$$\forall x \in \mathbb{R}$$

#### Comentario

Esta propiedad va a ser de gran utilidad en el trabajo de una ecuación o inecuación con un valor absoluto

7. Desigualdad triangular:

$$|a + b| \leq |a| + |b|$$

I. Si  $|a + b| < |a| + |b|$ , entonces  $ab < 0$

II. Si  $|a + b| = |a| + |b|$ , entonces  $ab > 0$

### III. Ecuaciones con Valor Absoluto

#### A. Caso 1

$$|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

Ejemplo:

$$\bullet |x - 3| = 0 \Leftrightarrow x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = 3$$

### B. Caso 2

$$|x| = a \Leftrightarrow (a \geq 0) \wedge (x = a \vee x = -a)$$

Ejemplos:

$$\bullet |x - 3| = 5 \quad \text{si } 5 \geq 0$$
$$x - 3 = 5 \vee x - 3 = -5$$
$$x = 8 \vee x = -2$$

$$\bullet |x - 3| = -4 \quad \text{si } -4 \geq 0$$
$$\therefore \text{C.S.} = \emptyset$$

### C. Caso 3

$$|x| = |a| \Leftrightarrow x = a \vee x = -a$$

Ejemplos:

$$|x - 3| = |2x + 2|$$
$$x - 3 = 2x + 2 \vee x - 3 = -2x - 2$$
$$-5 = x \quad 3x = 1$$
$$x = \frac{1}{3}$$

## IV. Inecuaciones con Valor Absoluto

### A. Caso 1

$$|x| \leq a \Leftrightarrow a \geq 0 \wedge (-a \leq x \leq a)$$

Ejemplo:

$$|x - 3| \leq 5: 5 \geq 0 \cap (-5 \leq x - 3 \leq 5)$$
$$-2 \leq x \leq 8$$

### B. Caso 2

$$|x| \geq a \Leftrightarrow x \geq a \vee x \leq -a$$

Ejemplo:

$$|x - 2| \geq 3: x - 2 \geq 3 \vee x - 2 \leq -3$$
$$x \geq 5 \vee x \leq -1$$

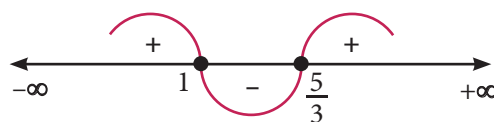
### C. Caso 3

$$|x| \leq |y| \Leftrightarrow (x - y)(x + y) \leq 0$$

Ejemplo:

$$|x - 2| \leq |2x - 3| \Leftrightarrow (-x + 1)(3x - 5) \leq 0$$
$$(x - 1)(3x - 5) \geq 0$$

Aplicando P.C.



$$x \in \left( -\infty; 1 \right] \cup \left[ \frac{5}{3}; +\infty \right)$$

## Trabajando en clase

### Integral

1. Calcula:

$$F = |\pi - 7| + |\pi - \sqrt{5}| + |\sqrt{5} - 2|$$

2. Resuelve:

$$|12x^2 + 7x - 10| = 0$$

3. Resuelve:

$$|3x^2 - 10| = -1$$

### PUCP

4. Resuelve e indica el producto de soluciones

$$\left| \frac{5x - 1}{x + 2} \right| = 4$$

Resolución:

$$\left| \frac{5x - 1}{x + 2} \right| = 4$$

$$|5x - 1| = 4|x + 2|$$

$$|5x - 1| = |4x + 8|$$

$$5x - 1 = 4x + 8 \vee 5x - 1 = -4x - 8$$

$$x = 9 \vee 9x = -7$$

$$x = 9 \vee x = -7/9$$

5. Calcula la suma de soluciones de la ecuación:

$$\left| \frac{4x + 3}{x + 2} \right| = 3$$

6. Calcula la suma de soluciones de la ecuación:

$$||x - 1| - 2| = 2014$$

7. Resuelve:

$$|x - 3| + |2x - 6| - 8 = 0$$

### UNMSM

8. Resuelve:

$$|3x - 7| = 4x - 9$$

Resolución:

$$|3x - 7| = 4x - 9; 4x - 9 \geq 0$$

$$x \geq \frac{9}{4}$$

$$3x - 7 = 4x - 9 \vee 3x - 7 = 9 - 4x$$

$$2 = x \quad \vee \quad 7x = 16$$

$$x = \frac{16}{7}$$

$$\text{CS} = \frac{16}{7} \cup \emptyset$$

9. Resuelve:

$$|2x + 17| = x + 18$$

10. Resuelve:

$$|3x - 2| = |x + 5|$$

11. Dada la ecuación:

$$|x + 1|^2 - 7|x + 1| = -6$$

### UNI

12. Resuelve:

$$|3x - 2| \leq 7$$

Resolución:

$$|3x - 2| \leq 7$$

$$-7 \leq 3x - 2 \leq 7$$

$$-5 \leq 3x \leq 9$$

$$-\frac{5}{3} \leq x \leq 3 \quad \therefore \text{CS} = \left[-\frac{5}{3}; 3\right]$$

13. Si el conjunto solución de la inecuación:

$$\frac{\sqrt{x+1} - 3}{x^2 - 2|x| + 4} \leq 0$$

Es  $(-\infty; a] \cup [b; +\infty)$ .

Calcula  $b - a$

14. Resuelve:

$$|2x - 3| > |x + 4|$$