UNIDAD IMAGINARIA

- **Unidad imaginaria**
  Es el número que resulta de extraer la raíz cuadrada al negativo de la unidad.

$$i = \sqrt{-1} \Rightarrow i^2 = -1$$

- **Cantidad imaginaria**
  Es el número que resulta de extraer la raíz de índice par a un número real negativo.
  Si $A > 0; n \in \mathbb{N}$

  Entonces, $\sqrt[2n]{-A}$

  Ejemplo:

  - $\sqrt{-9} = \sqrt{9(-1)} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{-1} = 3i$
  - $\sqrt{-11} = \sqrt{11(-1)} = \sqrt{11} \cdot \sqrt{-1} = \sqrt{11}\ i$

- **Potencias de la unidad imaginaria**
  - $i^1 = i$ $\qquad$ $i^{4k+1} = i^1 = i$
  - $i^2 = -1 \quad \Rightarrow \quad i^{4k+2} = i^2 = -1$
  - $i^3 = -i$ $\qquad$ $i^{4k+3} = i^3 = -i$
  - $i^4 = 1$ $\qquad$ $i^{4k} = i^4 = 1$

- **Propiedades**
  - $i^1 + i^2 + i^3 + i^4 = 0$
  - $i^1 + i^2 + i^3 + i^4 + \ldots + i^{4k-1} + i^{4k} = 0; \forall\ k \in Z^+$
  - $i^{-k} = (-1)^k \cdot i^k$
  - $i^{(\mathring{4}+n)^k} = i^{\mathring{4}+n^k}; 0 \le n \le 3; n \in Z^+; k \in Z^+$

- **Resultados notables**
  - $(1 + i)^2 = 2i$
  - $(1 - i)^2 = -2i$
  - $(1 + i)^4 = -4$
  - $(1 - i)^4 = -4$
  - $\frac{1+i}{1-i} = -i$
  - $\frac{1-i}{1+i} = -i$

Trabajando en clase

Integral

1. Reduce:

$$A = \frac{i^4 + i^8 + i^{12}}{i^{16} + i^{20}}$$

2. Reduce:

$$A = \sqrt{-9} + \sqrt{-25} + \sqrt{-64} - \sqrt{-100}$$

3. Reduce:

$$B = i + i^2 + i^3 + i^4 + i^{13} + i^{14} + i^{15} + i^{16}$$

PUCP

4. Reduce:

$$M = \frac{i^{4^2} + i^{4^3} + i^{4^4} + i^{4^5}}{i^{\mathring{4}} + i^{\mathring{4}}}$$

Resolución:

$$M = \frac{i^{\mathring{4}} + i^{\mathring{4}} + i^{\mathring{4}} + i^{\mathring{4}}}{i^{\mathring{4}} + i^{\mathring{4}}}$$

$$M = \frac{1 + 1 + 1 + 1}{1 + 1} = \frac{4}{2} = 2$$

5. Reduce:

$$M = \frac{i^{4^{2^1}} + i^{4^{3^2}} + i^{4^{4^3}} + i^{4^{5^4}}}{i^{4^{6^5}} + i^{4^{7^6}}}$$

6. Reduce:

$$P = \frac{i^{-321} + i^{-400}}{i^{20} + i^{91}}$$

7. Reduce:

$$A = 1 + i + i^2 + i^3 + \ldots + i^{2014}$$

UNMSM

8. Reduce:

$$A = \frac{(1+i)^2 + (1+i)^4 + (1-i)^2}{(1-i)^4}$$

Resolución:

$$A = \frac{2i - 4 - 2i}{-4} = \frac{-4}{-4} = 1$$

9. Reduce:

$$A = \frac{(1+i)^4 + (1-i)^4 + (1+i)\cdot(1-i)^2}{4}$$

10. Reduce:

$$A = \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^2 + \left(\frac{1-i}{1+i}\right)^2 + \frac{1+i}{1-\frac{1+i}{1-i}}$$

11. Reduce:

$$A = \frac{i^{100} + i}{1 - i} + \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^2 + \left(\frac{1-i}{1+i}\right)^4$$

UNI

12. Reduce:

$$A = \frac{(1+i)^3 + (1-i)^4}{(1-i)^5 + (1+i)^6 + 6i - 2}$$

Resolución:

$$A = \frac{(1+i)^2(1+i) + (-4)}{(1-i)^4 \cdot (1-i) + (1+i)^4(1+i)^2 + 6i - 2}$$

$$A = \frac{2i(1+i) - 4}{(-4)(1-i) + (-4)(2i) + 6i - 2}$$

$$A = \frac{2i + 2i^2 - 4}{-4 + 4i - 8i + 6i - 2} = \frac{2i - 6}{2i - 6} = 1$$

13. Reduce:

$$A = \frac{4i^{100} - 3i^{123457} + 5i^{\overline{abcd36}}}{8i^{\overline{PAMER2016}} + 7i^{\overline{PAMER2014}}}$$

14. Reduce:

$$G = \sqrt{2\sqrt{i - \sqrt{i + \sqrt[5]{i}}}}$$

$$Z = \cfrac{i + (1+i)^2}{\cfrac{1-i}{1-\cfrac{1-i}{1+\cfrac{1+i}{1-i}}}}$$

Calcula: $G \cdot Z$