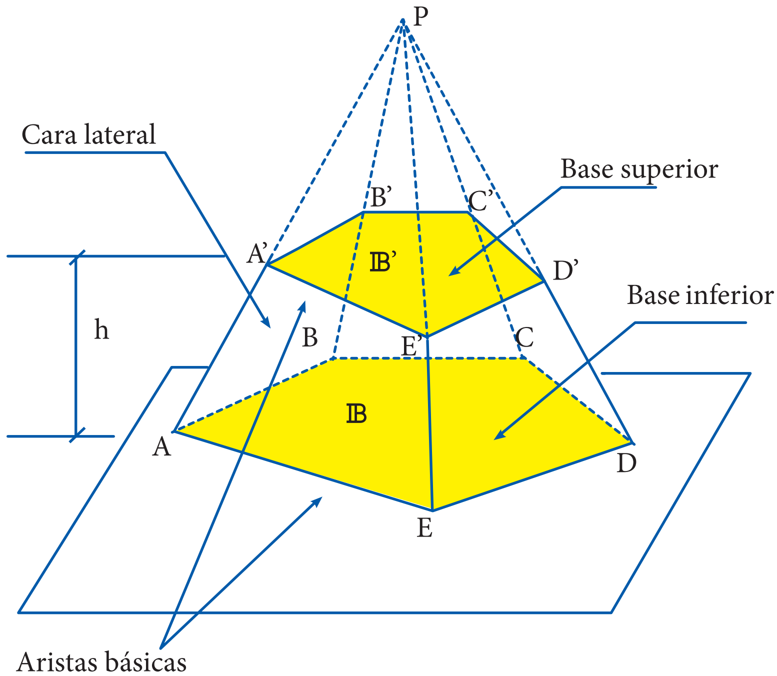
TRONCO DE PIRÁMIDE Y ESFERA

Tronco de pirámide

Es la porción de pirámide comprendida entre las bases y la sección plana determinada por un plano secante a la pirámide y paralelo a su base.
A la base y a dicha sección se les denomina bases del tronco de pirámide; sus caras laterales son regiones trapeciales, sus bases son regiones poligonales semejantes y su altura es la distancia entre sus bases.



En el gráfico, se muestra un tronco de pirámide pentagonal.
Notación: ABCDE – A'B'C'D'E'

Área de la superficie lateral (A_{SL})

$$\boxed{A_{SL} = \sum(\text{Áreas de las caras laterales})}$$

Área de la superficie total (A_{ST})

$$\boxed{A_{ST} = A_{SL} + \mathbb{B} + \mathbb{B}'}$$

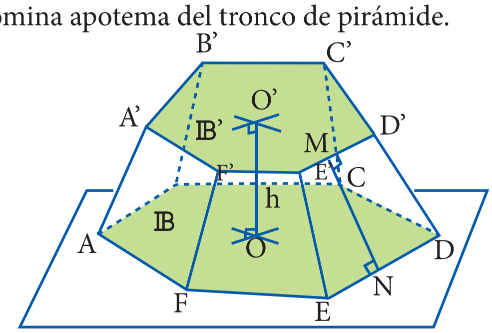
Volumen (V)

$$\boxed{V = \frac{h}{3}\left(B + B' + \sqrt{BB'}\right)}$$

$\mathbb{B}$ y $\mathbb{B}'$: área de las bases

Tronco de pirámide regular

Es aquel tronco de pirámide cuyas bases son regiones poligonales regulares de modo que sus centros están sobre una misma recta perpendicular a dichas bases. Sus caras laterales son regiones trapeciales isósceles congruentes entre sí, la altura de cada una de ellas se denomina apotema del tronco de pirámide.



En el gráfico, se muestra un tronco de pirámide regular «hexagonal».

Notación
ABCDEF – A'B'C'D'E'F'
$\overline{MN}$: apotema del tronco de pirámide regular (MN = ap)
O y O': centro de las bases (OO' = h)

Área de la superficie lateral (A_{SL})

$$\boxed{A_{ST} = (p + p')ap}$$

p: semiperímetro de la base ABCDEF
p': semiperímetro de la base A'B'C'D'E'F'

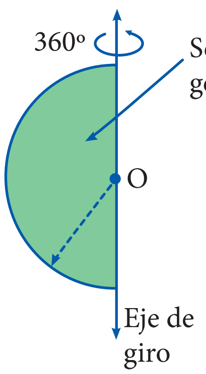
Nota
En un tronco de pirámide cuyas bases tiene por áreas A y B (A < B), se tiene una sección plana de área S paralela a las bases del tronco y que dista de dichas bases menor y mayor m y n respectivamente.

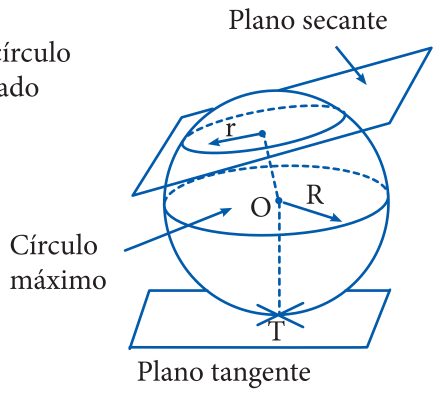
Se cumple:

$$\boxed{S = \frac{n\sqrt{A} + m\sqrt{B}}{m + n}}$$

Esfera

Es aquel sólido generado por un semicírculo al girar 360º, en torno a su diámetro.





Área del círculo máximo (A_{CM})

$$\boxed{A_{(CM)} = \pi R^2}$$

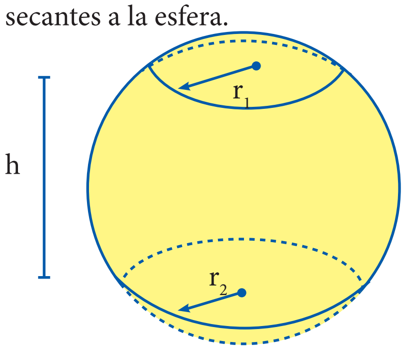
Área de la superficie esférica (A_{SE})

$$\boxed{A_{(SE)} = 4\pi R^2}$$

Volumen de la esfera (V_E)

$$\boxed{V_E = \frac{4}{3}\pi R^3}$$

Nota
Segmento esférico de dos bases, es la porción de esfera comprendida entre dos planos paralelos entre sí y secantes a la esfera.



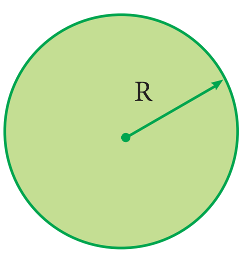
$$\boxed{V_{SE} = \frac{\pi h^3}{6} + \frac{\pi r_1^2 h}{2} + \frac{\pi r_2^2 h}{2}}$$

V_{SE}: volumen del segmento esférico de dos bases
h: distancia entre los planos paralelos.

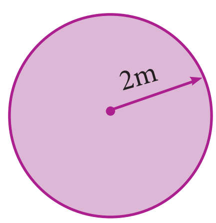
Trabajando en clase

Integral

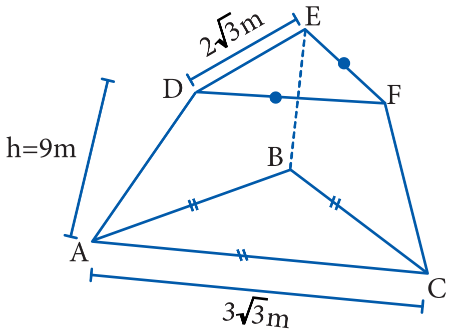
1. Calcula el volumen de la siguiente esfera si el área de la superficie esférica es $36\pi u^2$.



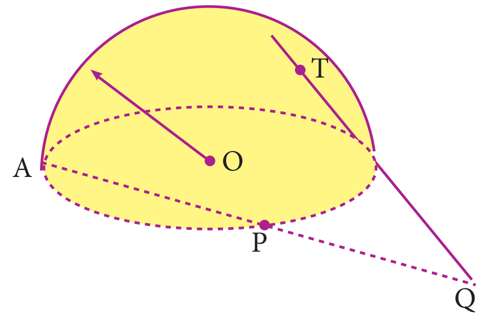
2. Según la figura, calcula el área de la superficie esférica.



3. En el gráfico, se muestra un tronco de pirámide regular, calcula su volumen.



7. En el gráfico, T es punto de tangencia si $m\overset{\frown}{AP} = 120°$ y TQ = 4(PQ) = 4u, calcula el área de la superficie semiesférica.

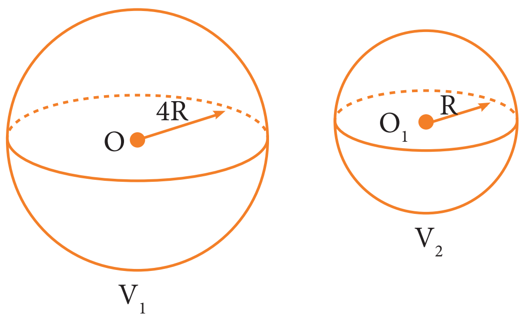


PUCP

4. Si el radio de una esfera es el cuádruple del radio de otra, ¿en qué razón están sus volúmenes?

Resolución:

Graficando:



$$V_1 = \frac{4}{3}\pi(4R)^3$$

$$V_1 = \frac{4}{3}\pi(R)^3$$

Piden: $\frac{V_1}{V_2}$

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{\frac{4}{3}\pi(4R)^3}{\frac{4}{3}\pi(R)^3} = 64$$

5. Si el radio de una esfera es el triple del radio de otra, ¿en qué razón están sus volúmenes?

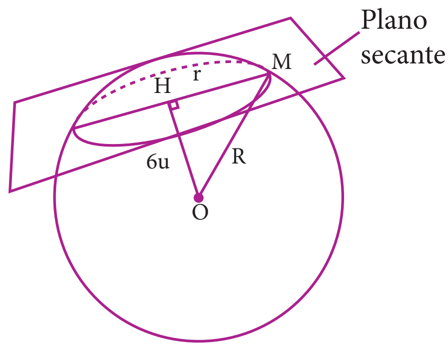
6. Las áreas de las bases de un tronco de pirámide son $3u^2$ y $12u^2$. Calcula el lado de una base de un prisma equivalente que tenga la misma altura y de base cuadrada.

UNMSM

8. Se traza un plano secante a una esfera de modo que la distancia del centro a dicho plano es 6u, además el área de la sección plana determinada de la esfera es $64\pi u^2$. Calcula el volumen de la esfera.

Resolución:

Graficando:



Dato:

$64\pi u^2 = \pi \cdot r^2$

$64u = R^2$

$8u = R \leftarrow$

$\therefore \triangle$OHM (Teorema de Pitágoras)

$R^2 = 6^2 + r^2$

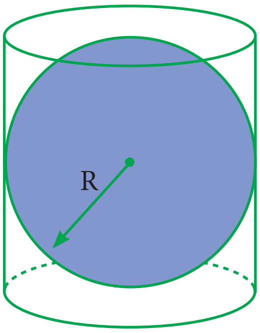
$R^2 = 6^2 + 8^2$

$\rightarrow R = 10$ u

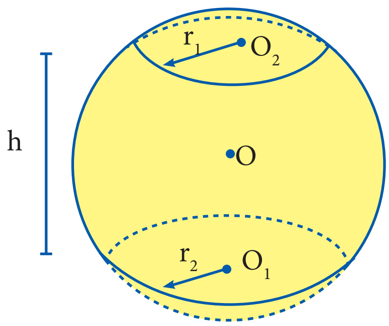
$$V_E = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{400}{3}\pi u^3$$

9. Se traza un plano secante a una esfera de modo que la distancia del centro de dicho plano es 5u, además el área de la sección plana determinada en la esfera es 144 πu^2. Calcula el volumen de la esfera.

10. Si el volumen de la esfera es $\frac{32}{3}\pi u^3$, calcula el volumen del cilindro.

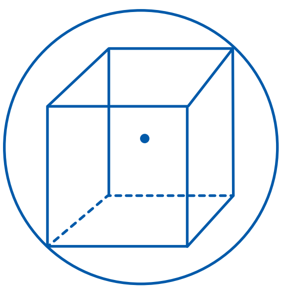


11. Se tiene el segmento esférico, calcula el volumen si h = 6u, r_1 = 2u y r_2 = 4u.

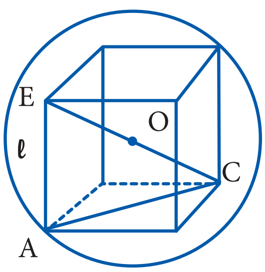


UNI

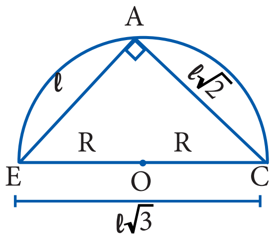
12. Si el volumen del cubo mostrado es 64u³, calcula el volumen de la esfera circunscrita al cubo.



Resolución:



Notar:



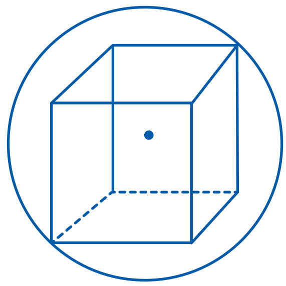
Por dato: $V_{cubo} = 64u^3 = \ell^3$

$4u = \ell$

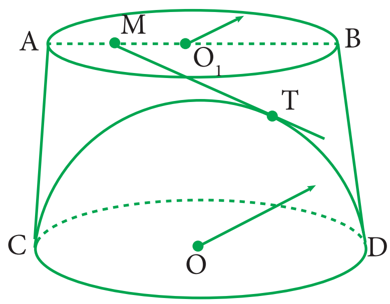
$\Rightarrow R = 2\sqrt{3}$ u

$\therefore V_E = \frac{4}{3}\pi R^3 = 32\sqrt{3}\,\pi u^3$

13. Si el volumen del cubo mostrado es 216u³, calcula el volumen de la esfera circunscrita al cubo.

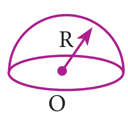


14. En el gráfico, se tiene un cilindro de revolución. Si T es punto de tangencia, CD = (AC)$\sqrt{3}$, BM = 3(AM) y MT = $\sqrt{7}$ u, calcula el volumen de la semiesfera.



Advertencia pre

El área de la superficie semiesférica:



$$S_{\substack{semi\\esfera}} = 3\pi R^2$$