Materiales Educativos GRATIS

ALGEBRA QUINTO

TIPOS DE NÚMEROS COMPLEJOS

Todo número complejo *z* de define como el par ordenado (a; b) de componente reales.

$$\boxed{z = (a;b) \text{ o } z = a + bi}$$

Donde

a: parte real de z, se denota $\mathbb{R}e(z) = a$

b: parte imaginaria de z, de denota $\mathbb{I}m(z) = b$

Tipos de números complejos

Complejo real	Complejo imaginario puro
Es aquel complejo que carece de la parte imaginaria. $z = a + 0i = a$	Es aquel complejo que carece de la parte real. $z = 0 + bi = bi$
Complejo nulo	
Es aquel complejo cuyas partes real e imaginaria son cero. $z = 0 + 0i = 0$	

Definiciones

Dado el complejo $z = a + bi$

Complejo conjugado de z ($\bar{z}$)

$$\boxed{\bar{z} = a - bi}$$

Complejo opuesto de z (z^*)

$$\boxed{z^* = -a - bi}$$

Operaciones con números complejos

- Adición
  $z = 3 + 5i$ y $w = 1 - 2i$
  $z + w = (3 + 1) + (5 - 2)i = 4 + 3i$

- Sustracción
  $z = -4 + 2i$ y $w = 3 + i$
  $z - w = (-4 - 3) - 2\,(2 - 1)i = -7 + i$

- Multiplicación
  $z = 3 + 2i$ y $w = 2 - i$
  $z \,.\, w = (3 + 2i)(2 - i) = 6 - 3i + 4i - 2i^2$
  $z \,.\, w = 6 - 3i + 4i - 2(-1) = 8 + i$

- División
  $z = 3 - i$ y $w = 2 + i$

$$\frac{z}{w} = \frac{3-i}{2+i} \# \underbrace{\frac{2-i}{2-i}}_{\text{se multiplica por su conjugado}} = \frac{6-5i+i^2}{4-i^2}$$

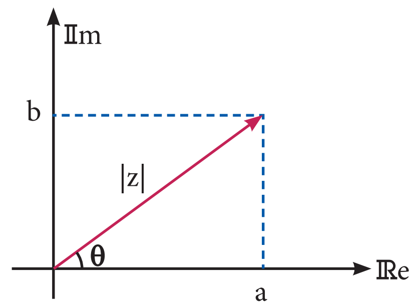
$$\Rightarrow \frac{5-5i}{5} = 1 - i$$

Representación geométrica de un número complejo

La representación se realiza en un plano, al cual llamaremos plano complejo o plano de Gauss.

Donde al eje x lo denominaremos eje real y al eje y como eje imaginario.

Sea $\boxed{z = a + bi}$



Módulo	Argumento
$\lvert z\rvert = \sqrt{a^2 + b^2}$	$\arg(z) = \theta$

Forma polar o trigonométrica

Del gráfico se obtiene: $a = |z|\cos\theta$ y $b = |z|\operatorname{sen}\theta$

Por lo tanto:

$$\boxed{z = |z|(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta)}$$

Observación

$$\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta = \operatorname{cis}\theta$$

Luego: $\boxed{z = |z| \operatorname{cis}\theta}$

Teoremas

Dados los complejos

$z = |z|(\cos\alpha + i\operatorname{sen}\alpha)$

$w = |w|(\cos\beta + i\operatorname{sen}\beta)$

Entonces:

$$\boxed{zw = |z||w|(\cos(\alpha + \beta) + i\operatorname{sen}(\alpha + \beta))}$$

$$\boxed{\frac{z}{w} = \frac{|z|}{|w|}(\cos(\alpha - \beta) + i\operatorname{sen}(\alpha - \beta))}$$

$$\boxed{\arg(zw) = \arg(z) + \arg(w)}$$

$$\boxed{\arg\left(\frac{z}{w}\right) = \arg(z) - \arg(w)}$$

Teorema de Moivre

Si $z = |z|(\cos\theta + i\operatorname{sen} n\theta)$, entonces:

$\boxed{z^n = |z|^n(\cos n\theta + i\operatorname{sen} n\theta)}$, para todo $n \in \mathbb{Z}$

Teorema de Euler

$$\boxed{e^{i\theta} = \cos\theta + i\operatorname{sen}\theta}$$

Donde:

- e es la base del logaritmo neperiano
- θ es el argumento en radianes

Forma exponencial de un número complejo:

$$\boxed{z = |z|e^{i\theta}}$$

Trabajando en clase

Integral

1. Calcula:
Re(z) + Im(z), sabiendo que:

$$z = (1 + i)^2 + i^6 - i^{32}$$

2. Calcula ab, si:

$$a + bi = (2 - i)^2 + \frac{1 - i}{1 + i}$$

3. Calcula $\bar{z}$ y z^*, en :

$$z = 6 + \overline{(3 - i)}(-2 + 5i)^*$$

PUCP

4. Reduce $w = \dfrac{5}{1 + 2i} + \dfrac{4 + i}{1 - 4i}$

Resolución

Reuerda $\boxed{i^2 = -1}$

$$w = \frac{5}{1 + 2i}\cdot\frac{(1 - 2i)}{(1 - 2i)} + \frac{4 + i}{1 - 4i}\cdot\frac{(1 + 4i)}{(1 + 4i)}$$

$$w = \frac{5 - 10i}{1 - (2i)^2} + \frac{4 + i + 16i + 4i^2}{1 - (4i)^2}$$

$$w = \frac{5 - 10i}{1 - 4i^2} + \frac{4 + 17i - 4}{1 - 16i^2}$$

$$w = \frac{5 - 10i}{1 + 4} + \frac{17i}{1 + 16}$$

$$w = \frac{5 - 10i}{5} + \frac{17i}{17} = 1 - 2i + i = 1 - i$$

5. Calcula el módulo de:

$$w = \frac{2}{1 - i} + \frac{3 + i}{1 - 3i}$$

6. Calcula el valor de «m» si el siguiente complejo es imaginario puro

$$z = \frac{3 - 2mi}{1 + 5i}$$

7. Calcula el valor de «a», si se tiene el complejo real:

$$Z = \frac{1 + 3i}{2 - ai}$$

UNMSM

8. Calcula el módulo y el argumento de:

$$z = (3 + 2i)^2 - (1 + i)^2 + (1 - i)^2 - i^{666}$$

Resolución:

Recuerda

$\boxed{(1+i)^2 = 2i}$ $\boxed{(1-i)^2 = 2i}$ $\boxed{i^{4+k} = i^k}$

$z = (3 + 2i)^2 - (1 + i)^2 + (1 - i)^2 - i^{666}$

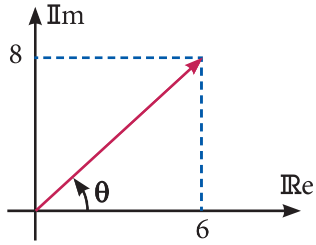
$z = 9 + 12i + 4i^2 - 2i + (-2i) - i^2$

$z = 5 + 12i - 2i - 2i + 1$

$z = 6 + 8i \rightarrow |z| = \sqrt{6^2 + 8^2} = \sqrt{100} = 10$

Módulo de z: $|z| = 10$

Gráfica de $z = 6 + 8i$

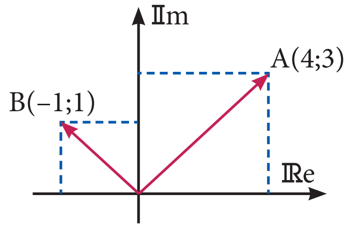


Se observa que $\boldsymbol{\theta} = 53°$, por lo tanto:
Argumento de z: $\arg(z) = 53°$:

9. Calcula el módulo y el argumento de:

$$z = (1 + 2i)^2 - 4i^{2018} + 3\left(\frac{1-i}{1+i}\right)$$

10. Calcula $|A + B|$ y el $\arg(A) + \arg(B)$



11. La forma binomial del complejo:

$$z = \frac{3\sqrt{2}(\cos 35° + i\,\mathrm{sen}35°)\,2\sqrt{2}(\cos 55° + i\,\mathrm{sen}55°)}{\sqrt{6}(\cos 17° + i\,\mathrm{sen}17°)\sqrt{6}(\cos 13° + i\,\mathrm{sen}13°)}$$

UNI

12. Si $|z| + z = 3 - \sqrt{3}\,i$; $(z = a + bi)$
Halle $\sqrt{|z|}$

UNALM 2010-II

Resolución

Por dato:

$|z| + z = 3 - \sqrt{3}\,i$ y $z = a + bi$

Entonces:

$\sqrt{a^2 + b^2} + a + bi = 3 - \sqrt{3}\,i$

Por igualdad de complejos:

$$\sqrt{a^2 + b^2} + a = 3;\ b = -\sqrt{3}$$

Remplazando:

$$\sqrt{a^2 + (-\sqrt{3})^2} + a = 3$$

$\sqrt{a^2 + 3} = 3 - a$, elevando al cuadrado

$a^2 + 3 = 9 - 6a + a^2$

$a = 1$

Por lo que $z = 1 - \sqrt{3}\,i \rightarrow |z| = 2$

$\therefore \sqrt{|z|} = \sqrt{2}$

13. Si el número complejo $z = a + bi$, con a y b números reales, cumple $|z| + z = 2 + 8i$, entonces $|z|^2$ es igual a :

UNAC 2012-I

14. Al resolver el sistema $\begin{cases} |z - 3i| = 2 \\ y - x^2 = 1 \end{cases}$

Donde $z = x + iy$ es un numero complejo; la suma de las ordenadas de los puntos solución es:

UNI 2011-II