TIPOS DE MATRICES

Es un arreglo en forma rectangular, de mn elementos dispuestos en «m» filas y «n» columnas.
Una matriz de m filas y n columnas se dice que es de orden $m \times n$ y esta se encierra entre «corchetes» o «paréntesis».

Ejemplo

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 0 & -1 \\ 7 & -2 & 1 \end{bmatrix}_{2\times 3} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 9 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 8 \\ 9 & -3 & 7 \end{bmatrix}_{4\times 3}$$

Notación general

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{mn} \end{bmatrix}_{m\times n}$$

A es una matriz formada por m filas y n columnas.

Igualdad de matrices

Dos matrices A y B son iguales si tienen el mismo orden y cada elemento de A es igual al elemento de B ubicado en la misma posición.
Ejemplo

$$A = \begin{bmatrix} e & \sqrt{5} \\ 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}_{3\times 2} \qquad B = \begin{bmatrix} e & \sqrt{5} \\ 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}_{3\times 2}$$

Tipos de matrices

1. Matriz fila

   Es aquella matriz de una sola fila, cuyo orden es 1 n. Es decir:
   $F = [a_{11} \quad a_{12} \quad a_{13} \quad a_{14} \quad \ldots a_{1n}]_{1\times n}$
   es una matriz
   Ejemplo
   $A = [-1 \quad 3]_{1\times 2} \quad B = [2 \quad 9 \quad 1]_{1\times 4}$

2. Matriz columna

   Es aquella matriz de una sola columna cuyo orden es $1n \times 1$. Es decir:

   $$A = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{bmatrix}_{n\times 1} \quad \text{es una matriz columna}$$

   Ejemplos

   $$A = \begin{bmatrix} 2 \\ 9 \end{bmatrix}_{2\times 1} \quad ; \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}_{3\times 1}$$

3. Matriz cuadrada

   Es aquella matriz que tiene igual números de filas y columnas. Es decir:
   $L = [aij]_{m\times n}$ es cuadrada $\leftrightarrow m = n$

   La matriz L es de orden $n \times n$ o simplemente de orden n.
   Ejemplo

   $$U = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 9 & 8 \\ -3 & 9 & 7 \end{bmatrix}_{3\times 3}$$

4. Matriz diagonal

   Es una matriz cuadrada cuyos elementos fuera de la diagonal principal son ceros, y los elementos de la diagonal principal al menos uno es distinto de cero.
   Ejemplo

   $$I = \begin{bmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

   $$G = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

5. Matriz escalar

Es aquella matriz diagonal que tiene todos los elementos de la diagonal principal iguales a un número no nulo.

$$G = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \; ; \; I = \begin{bmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

son iguales   son iguales

6. Matriz identidad

Es aquella matriz donde todos los elementos de la diagonal principal son iguales a uno. Se denota por I_n o simplemente I.

Ejemplo

$$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \; ; \; I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

son unos   son unos

7. Matriz opuesta

Sea $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ una matriz, denotamos y definimos la matriz opuesta de A por $-A$, tal que $-A = [-a_{ij}]_{m\times n}$

Ejemplo

Si:

$$A = \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 7 & -1 \\ 3 & 9 \end{bmatrix} \rightarrow -A = \begin{bmatrix} -8 & 0 \\ -7 & 1 \\ -3 & -9 \end{bmatrix}$$

Traza de una matriz

Dada una matriz cuadrada A, a la suma de los elementos de la diagonal principal de A se le llama traza y se denota por Traz(A).

Ejemplo

Dada la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 9 & 4 \\ 8 & 1 & 0 \\ 7 & 6 & -3 \end{bmatrix}$$

elementos de la dagonal principal

Entonces, $\text{Traz}(A) = 3 + 1 + (-3) = 1$

Teoremas

- $\text{Traz}(A \pm B) = \text{Traz}(A) \pm \text{Traz}(B)$
- $\text{Traz}(\lambda A) = \lambda \cdot \text{Traz}(A); \lambda \in \mathbb{R}$
- $\text{Traz}(AB) = \text{Traz}(BA)$

Matrices especiales

1. Matriz transpuesta

Sea $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ una matriz, denotamos y definimos la matriz transpuesta de A por A_t, como aquella que resulta de intercambiar las filas por las columnas de A.

Ejemplo

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 7 & 3 & 9 \end{bmatrix}_{2\times 3} \Rightarrow A^t = \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 0 & 3 \\ 1 & 9 \end{bmatrix}_{3\times 2}$$

2. Matriz simétrica

Una matriz cuadrada $A = [a_{ij}]_{n\times m}$ es simétrica si es igual a su transpuesta; es decir:

$$\boxed{A \text{ es simétrica} \leftrightarrow A = A^t}$$

Ejemplo

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 7 \\ 5 & 4 & -5 \\ 7 & -5 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow A^t = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 7 \\ 5 & 4 & -5 \\ 7 & -5 & 0 \end{bmatrix}$$

A es simétrica pues $A = A^t$

3. Matriz ansimétrica

Una matriz cuadrada $A = [a_{ij}]_{n\times m}$ es antisimétrica si es igual al opuesto de su transpuesta; es decir:

$$\boxed{A \text{ es antisimétrica} \leftrightarrow A = -A^t}$$

Ejemplo

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 3 & -1 \\ -3 & 0 & -7 \\ 1 & 7 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow A^t = \begin{bmatrix} 0 & -3 & 1 \\ 3 & 0 & 7 \\ -1 & -7 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow -A^t = \begin{bmatrix} 0 & 3 & -1 \\ -3 & 0 & -7 \\ 1 & 7 & 0 \end{bmatrix}$$

A es simétrica, pues $A = -A^t$

Trabajando en clase

Integral

1. Construye la matriz:
$A = (a_{ij})_{2\times3} / a_{ij} = i + 3j$

2. Construye la matriz:

$$B = (b_{ij})_{3\times3} / b_{ij} = \begin{cases} i + j \,;\, i < j \\ i \cdot j \;\,;\, i \geq j \end{cases}$$

3. Determina el valor de «xy – wz», si las siguientes matrices son iguales.

$$A = \begin{pmatrix} x - 5y & x \\ 3 & z + x \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} -2 & y + 2 \\ w & 7 \end{pmatrix}$$

PUCP

4. Calcula «xywz», si:

$$k = \begin{pmatrix} x - 2 & 2a & w^3 + 1 \\ 0 & y + 3 & 3b - 1 \\ c - 7 & 0 & 2z - 7 \end{pmatrix}$$

es una matriz identidad

Resolución:

Como la matriz k es una matriz identidad, los elementos de la diagonal principal son unos, y los demás son ceros entonces:

$x - 2 = 1 \quad ; \quad y + 3 = 1 \quad ; \quad 2z - 7 = 1$
$x = 3 \qquad\qquad y = -2 \qquad\qquad z = 4$

Además: $w^3 + 1 = 0$
$w^3 = -1$
$w = -1$

$\therefore$ xywz = (3)(–2)(4)(–1) = 24

5. Si A es una matriz identidad, calcula: «abcd».

$$A = \begin{pmatrix} a^3 - 7 & 0 & d + 1 \\ 0 & 3b - 14 & 0 \\ x + 4 & y - 5 & c/2 - 5 \end{pmatrix}$$

6. Calcula la traza de R, si es una matriz diagonal:

$$R = \begin{pmatrix} m - 3n & m - 3 \\ n - 2 & mn \end{pmatrix}$$

7. Calcula «a + b + c + d», si «E» es una matriz escalar.

$$E = \begin{pmatrix} 2a - 7 & 0 & d + 2 \\ 0 & 8 - 3a & 0 \\ 0 & c - 3 & b - 4 \end{pmatrix}$$

UNMSM

8. Si

$$N = \begin{pmatrix} 1 & 2b + 1 & 6a - 9 \\ 5b - 7 & \pi & c + 10 \\ 4a - 3 & 7 + 2c & 0 \end{pmatrix}$$

es una matriz simétrica, calcula el valor de «abc».

Resolución:

Como es simétrica; se cumple
$a_{12} = a_{21}$; $a_{31} = a_{13}$; $a_{32} = s_{23}$; entonces
$ab - 7 = 2b + 1$; $4a - 3 = 6a - 9$; $7 + 2c = c + 10$
$b = 8/3 \qquad 6 = 3a \qquad c = 3$
$a = 3$

$\therefore abc = (3)\left(\frac{8}{\cancel{3}}\right)(\cancel{3}) = 24$

9. Si:

$$L = \begin{pmatrix} 3 & 2a + 2b & 2c + 10 \\ 3a - b & 6 & 2a + 10 \\ c + 7 & 5a + b & \sqrt{5} \end{pmatrix}$$

es una matriz simétrica. Calcula el valor de a + b + c.

10. Determina el valor de la Traz(U); si

$$U = \begin{pmatrix} a + 1 & 7 & 0 \\ a - 5 & b - 3 & -11 \\ b - 1 & c + 2 & c + 4 \end{pmatrix}$$

es una matriz triangular superior.

11. Escribe verdadero (V) o falso (F) según corresponda:

I. $\begin{bmatrix} k & s & R \\ 2 & b & m \\ x & s & J \end{bmatrix}$ es una matriz cuadrada. ( )

II. la Traza de la siguiente matriz es 4 ( )

$$\begin{bmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 9 \\ 7 & \pi & 4 \end{bmatrix}$$

III. La suma de elementos de la matriz transpuesta de B es 10. ( )

$$B = \begin{bmatrix} 6 & -6 \\ 7 & 4 \end{bmatrix}$$

IV. $\begin{bmatrix} 4 & -5 & 7 \\ 0 & \pi & \log 2 \\ 0 & 0 & e \end{bmatrix}$ es una matriz triangular inferior. ( )

UNI

12. Si A es una matriz antisimétrica:

$$A = \begin{pmatrix} b-7 & a-23 \\ 4a-7 & c+1 \end{pmatrix}$$

Calcula el valor de «abc»

Resolución:

Como A es antisimétrica $A = -A^t$

$$A = \begin{pmatrix} b-7 & a-23 \\ 4a-7 & c+1 \end{pmatrix} \Rightarrow A^t = \begin{pmatrix} b-7 & 4a-7 \\ a-23 & c+1 \end{pmatrix}$$

entonces:

$$-A^t = \begin{pmatrix} 7-b & 7-4a \\ 23-a & -c-1 \end{pmatrix}$$

Por lo que:

$A = A^t$ es decir

$$\begin{pmatrix} b-7 & a-23 \\ 4a-7 & c+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7-b & 7-4a \\ 23-a & c-1 \end{pmatrix}$$

Luego: $b - 7 = 7 - b$; $c + 1 = -c - 1$; $a - 23 = 7 - 4a$

$\boxed{b = 7}$ $\boxed{c = -1}$ $\boxed{a = 6}$

$\therefore\ abc = (7)(-1)(6) = -42$

13. Calcula «abc», si A es una matriz antisimétrica.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2a-3b & a+b \\ 4a+b & 0 & -2 \\ 20 & 3c-7 & 0 \end{pmatrix}$$

14. Si B es la matriz opuesta de A y b_{ij} son los elementos de B^t.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -9 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & 7 \end{pmatrix}$$

calcula el valor de $b_{21} + b_{32} + b_{11}$