SOLUCIÓN GENERAL DE UNA ECUACIÓN TRIGONOMÉTRICA

El objetivo de este capítulo es encontrar la solución general que satisface a una ecuación trigonométrica.

Definiciones

Valor principal (Vp)

Es el valor que asume el arco cuando se aplica la función inversa.

Si $\text{Snx} = N \Rightarrow \text{Vp} = \text{ArcSen}(N)$

También Si $\text{Cosx} = N \Rightarrow \text{Vp} = \text{ArcCos}(N)$

Si $\text{Tgx} = N \Rightarrow \text{Vp} = \text{ArcTg}(N)$

Ejemplos: Si $\text{Tg}\left(\frac{x}{3}\right) = 1 \Rightarrow \text{Vp} = \text{ArcTg}(1)$

$$\Rightarrow \text{Vp} = \frac{\pi}{4}$$

Si $\text{Cos}\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2} \Rightarrow \text{Vp} = \text{ArcCos}\left(\frac{1}{2}\right)$

$$\Rightarrow \text{Vp} = \frac{\pi}{3}$$

Solución general

Si $\text{Senx} = A \Rightarrow$ solución general: $\boxed{x = n\pi + (-)^n \text{Vp}}$

donde $\text{Vp} = \text{ArcSen}(A)$

Si $\text{Cosx} = B \Rightarrow$ solución general: $\boxed{x = 2n\pi \pm \text{Vp}}$

donde $\text{Vp} = \text{ArcCos}(B)$

Si $\text{Tgx} = C \Rightarrow$ solución general: $\boxed{x = n\pi + \text{Vp}}$

donde $\text{Vp} = \text{ArcTg}(C)$

$\therefore n \in \mathbb{Z}$

Recuerda

$\text{Senx} = A \Rightarrow -\frac{\pi}{2} \leq \text{Vp} \leq \frac{\pi}{2}$

$\text{Cosx} = B \Rightarrow 0 \leq \text{Vp} \leq \pi$

$\text{Tgx} = C \Rightarrow -\frac{\pi}{2} < \text{Vp} < \frac{\pi}{2}$

Trabajando en clase

Integral

1. Determina el valor principal (Vp) para cada E. T.

- $\text{Sen}\left(4x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \rightarrow \text{Vp} =$ ________
- $\text{Cos}(5x + 10°) = \frac{1}{2} \rightarrow \text{Vp} =$ ________
- $\text{Tan}\left(x - \frac{\pi}{10}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{3} \rightarrow \text{Vp} =$ ________
- $\text{Cos}\left(3x - \frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \rightarrow \text{Vp} =$ ________

2. Resuelve e indica la solución general:
$2\text{Sen}4x - 1 = 0$

3. Resuelve e indica la solución general:

$$2\text{Cos}\left(\frac{x}{4}\right) - \sqrt{3} = 0$$

PUCP

4. Resuelve e indica la solución:

$$\text{Tan}\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{3}$$

Resolución:

$$\underbrace{\text{Tan}\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)} = \sqrt{3} \Rightarrow \text{Vp} = \text{ArcTan}\sqrt{3} = \frac{\pi}{2}$$

$$2x - \frac{\pi}{4} = n\pi + Vp$$

$$2x - \frac{\pi}{4} = n\pi + \frac{\pi}{3} \rightarrow 2x = n\pi + \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}$$

$$2x = n\pi + \frac{7\pi}{12} \rightarrow x = \frac{n\pi}{2} + \frac{7\pi}{24}$$

5. Resuelve e indica la solución general.

$$\text{Tan}\left(3x + \frac{\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

6. Resuelve e indica la solución general:

$$\text{Sen}\left(4x + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

7. Resuelve e indica la solución general:

$$\text{Cos}\left(\frac{x}{3} + \frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}$$

UNMSM

8. Resuelve e indica la solución general de la E. T.:
$\text{Sen}^6 2x + \text{Cos}^6 2x + \text{Cos}^2 2x = 2$

Resolución:

S.q.: $\text{Sen}^6 x + \text{Cos}^6 x = \frac{5}{8} + \frac{3}{8}\text{Cos}4x$ (Identidad)

$$\underbrace{\text{Sen}^6 2x + \text{Cos}^6 2x} + \text{Cos}^2 x = 2$$

$$\frac{5}{8} + \frac{3}{8}\text{Cos}8x + \frac{1 + \text{Cos}4x}{2} = 2$$

$5 + 3\text{Cos}8x + 4 + 4\text{Cos}4x = 2\cdot 8$
$3\text{Cos}8x + 4\text{Cos}4x = 7$
$3(2\text{Cos}^2 4x - 1) + 4\text{Cos}4x = 7$
$6\text{Cos}^2 4x + 4\text{Cos}4x - 10 = 0$
$3\text{Cos}^2 4x + 2\text{Cos}4x - 5 = 0$

$3\text{Cos}4x \qquad 5$
$\text{Cos}4x \qquad -1$

Luego: $(3\text{Cos}4x + 5)(\text{Cos}4x - 1) = 0$
$\text{Cos}4x - 1 = 0 \Rightarrow \text{Cos}4x = 1$
$\Rightarrow Vp = 0$

Finalmente:

$$4x = 2n\pi \pm 0 \Rightarrow x = \frac{n\pi}{2}$$

9. Resuelve e indica la solución general de la E. T.
$\text{Sen}^6 x + \text{Cos}^6 x = \frac{13}{16}$; $\forall\ n \in \mathbb{Z}$

10. Calcula la solución general de la ecuación:

$$\text{Sen}\left(\frac{\pi}{6} + x\right) + \text{Sen}\left(\frac{\pi}{6} - x\right) = \frac{3}{4\text{Cos}x};\ n \in \mathbb{Z}$$

11. Calcula la solución general de la ecuación:

$$\text{Cos}^2\left(\frac{\pi}{8} - x\right) - \text{Cos}^2\left(\frac{\pi}{8} + x\right) = \frac{1}{2};\ n \in \mathbb{Z}$$

UNI

12. Resuelve e indica la solución general de la E. T.

$$\text{Cos}\left(2x + \frac{4\pi}{3}\right)\text{Sen}\left(2x - \frac{5\pi}{6}\right) - \text{Cos}2x + 1 = 0$$

Resolución:

$$\text{Cos}\left(2x + \frac{4\pi}{3}\right)\text{Sen}\left(2x - \frac{5\pi}{6}\right) - \text{Cos}2x + 1 = 0$$

$$2\text{Cos}\left(2x + \frac{4\pi}{3}\right)\text{Cos}\left(\frac{4\pi}{3} - 2x\right) - 2\text{Cos}2x + 2 = 0$$

por transformaciones, tenemos:

$$\text{Cos}\frac{8\pi}{3} + \text{Cos}4x - 2\text{Cos}2x + 2 = 0$$

$$\text{Cos}\frac{2\pi}{3} + 2\text{Cos}^2 2x - 1 - 2\text{Cos}2x + 2 = 0$$

$$-\frac{1}{2} + 2\text{Cos}^2 2x - 2\text{Cos}2x + 1 = 0$$

$$2\text{Cos}^2 2x - 2\text{Cos}2x + \frac{1}{2} = 0$$

$\rightarrow 4\text{Cos}^2 2x - 4\text{Cos}2x + 1 = 0$
$(2\text{Cos}2x - 1)^2 = 0 \Rightarrow 2\text{Cos}2x - 1 = 0$
$\rightarrow \text{Cos}2x = \frac{1}{2}$

$$Vp = \frac{\pi}{3}$$

$$\therefore\ 2x = 2n\pi \pm \frac{\pi}{3} \rightarrow x = n\pi \pm \frac{\pi}{6}$$

13. Indica la solución general:

$$2\text{Sen}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right)\text{Cos}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right) = \sqrt{3}\,\text{Cosx}$$

14. Resuelve e indica un conjunto solución de la E. T.:
$\text{Tan}2x + \text{Cotx} = 8\text{Cos}^2 x$