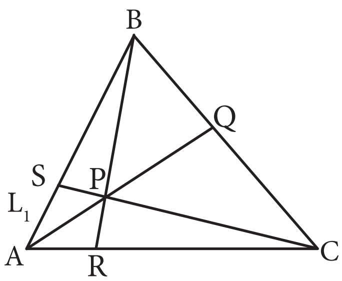
SEMEJANZA DE TRIÁNGULOS

TEOREMA DE CEVA

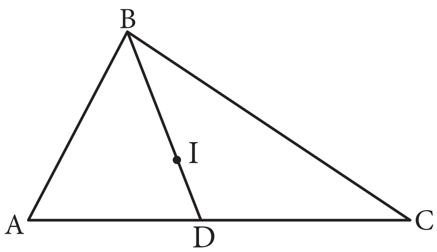
Sea P el cevacentro del triángulo ABC, entonces:



$$\boxed{(AS)(BQ)(RC) = (SB)(QC)(AR)}$$

TEOREMA DEL INCENTRO

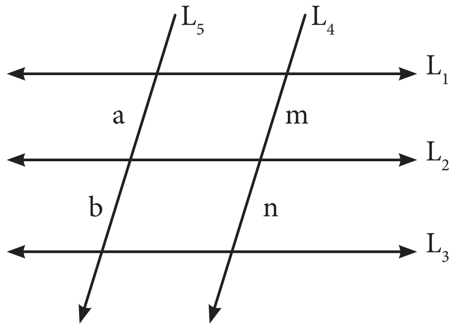
Si I es el incentro de triángulo ABC, entonces:



$$\boxed{\frac{BI}{ID} = \frac{AB + BC}{AC}}$$

TEOREMA DE THALES

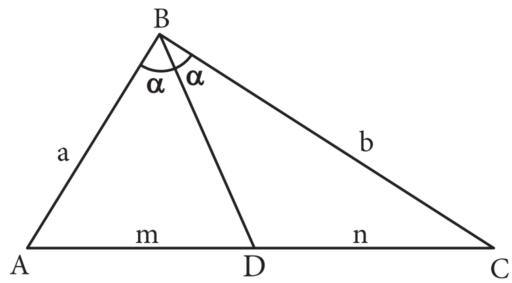
Sea $\overleftrightarrow{L_1} \parallel \overleftrightarrow{L_2} \parallel \overleftrightarrow{L_3}$



$$\boxed{\frac{a}{b} = \frac{m}{n}}$$

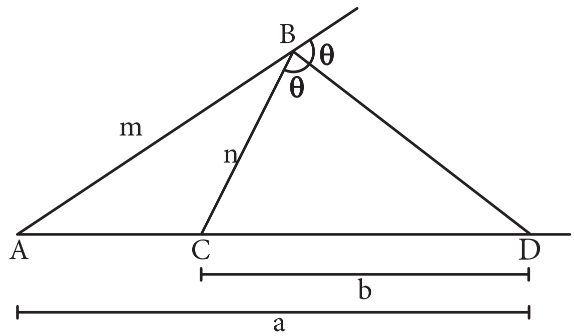
PROPIEDAD DE LA BISECTRIZ

- **Interior**



$$\boxed{\frac{a}{m} = \frac{b}{n}}$$

- **Exterior**

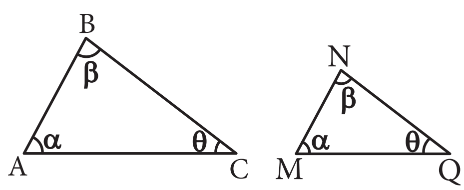


$$\boxed{\frac{m}{a} = \frac{n}{b}}$$

SEMEJANZA DE TRIÁNGULOS

Dos triángulos son semejantes si sus ángulos interiores tienen igual medida y sus lados homólogos son proporcionales.

Los lados homólogos en triángulos semejantes , son aquellos lados opuesto, a ángulos de igual medida.



Notación:

$$\boxed{9ABC \sim 9MNQ}$$

Símbolo de semejaza: ~

Se lee: "es semejante a"

Pares de lados homólogos:

$\overline{AB}$ y $\overline{MN}$; $\overline{BC}$ y $\overline{NQ}$; $\overline{AC}$ y $\overline{MQ}$

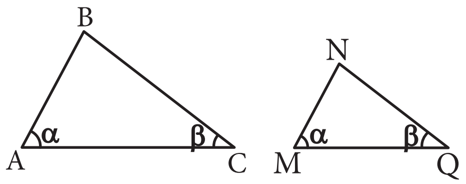
Se cumple:

$$\boxed{\frac{AB}{MN} = \frac{BC}{NQ} = \frac{AC}{MQ} = k}$$

donde k es la razón de semejanza.

CASOS DE SEMEJANZA DE TRIÁNGULOS

1. Dos triángulos son semejantes si dos ángulos del primer triángulo son de igual medida a dos ángulos del segundo triángulo.

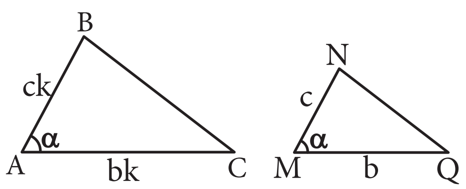


m∠BAC = m∠NMQ y m∠ACB = m∠MQN

Entonces:

$$\boxed{9ABC \sim 9MNQ}$$

2. Dos triángulos son semejantes si un ángulo del primer triángulo es de igual medida de un ángulo del segundo y los lados que los determinan son respectivamente proporcionales.

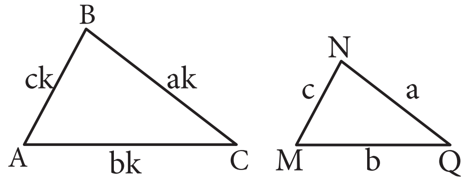


m∠BAC = m∠NMQ y AB/AC = MN/MQ

Entonces:

$$\boxed{9ABC \sim 9MNQ}$$

3. Dos triángulos son semejantes si los tres lados del primer triángulo son proporcionales a los tres lados del segundo triángulo.



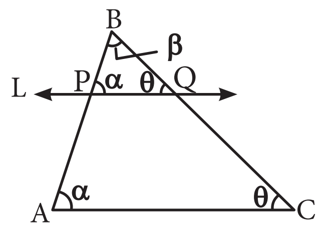
Si $\frac{AB}{MN} = \frac{BC}{NQ} = \frac{AC}{MQ}$, entonces

$$\boxed{9ABC \sim 9MNQ}$$

PROPIEDADES

1. En todo triángulo, al trazar un recta paralela a uno de sus lados, siempre se forma un triángulo parcial semejante al total.

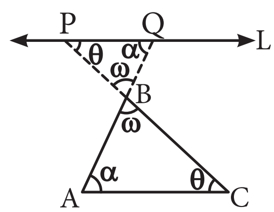
   i) Si $\overleftrightarrow{L} // \overline{AC}$



Entonces:

$$\boxed{9ABC \sim 9PBQ}$$

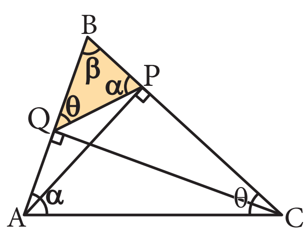
   ii) Si $\overleftrightarrow{L} // \overline{AC}$



Entonces:

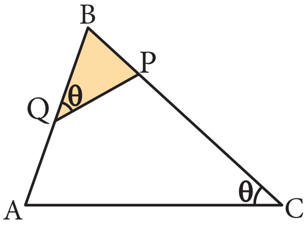
$$\boxed{9ABC \sim 9PBQ}$$

2. En todo triángulo, al unir los pies de dos alturas, siempre se forma un triángulo parcial semejante al total.



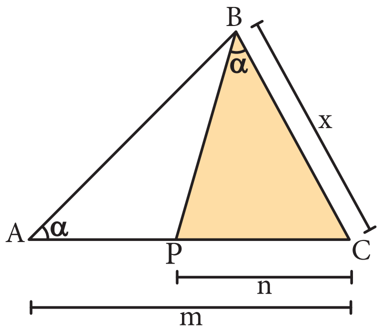
$$\boxed{9ABC \sim 9PBQ}$$

Consecuencia:



$\boxed{\triangle ABC \sim \triangle PBQ}$

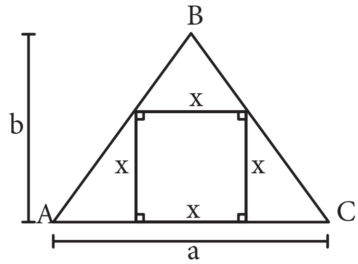
3. En la figura:
$\triangle ABC \sim \triangle PBQ$

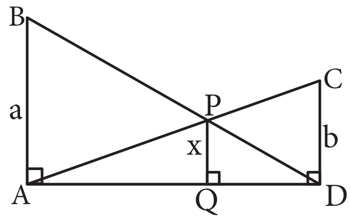


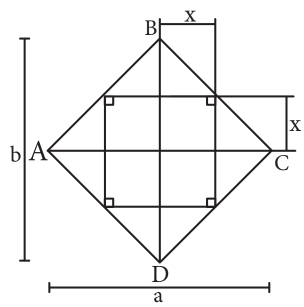
Se cumple:

$$\boxed{x^2 = m \cdot n}$$

4. En las figuras:





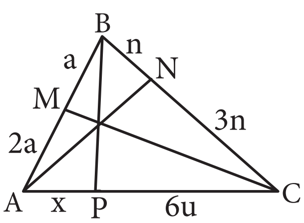


Se cumple: $\boxed{x = \dfrac{a.b}{a+b}}$

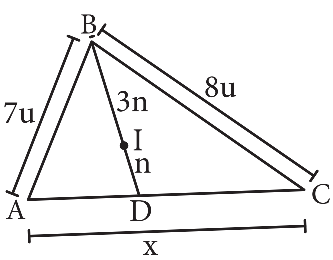
Trabajando en clase

Integral

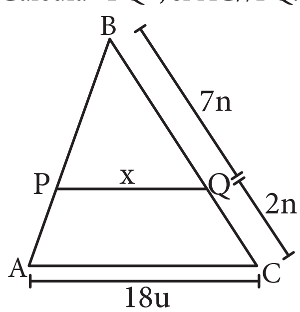
1. Calcula «x».



2. Calcular «x», si I es el incentro del triángulo ABC.

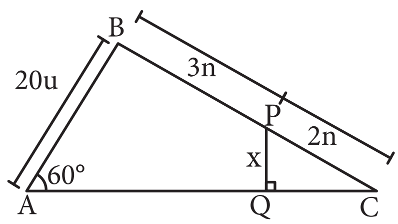


3. Calcula «PQ», si $\overline{AC}//\overline{PQ}$.

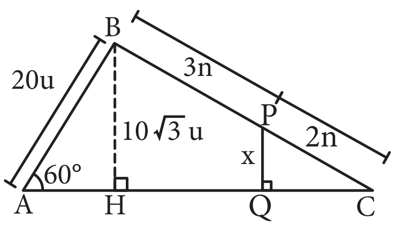


PUCP

4. Calcula «x».



Resolución



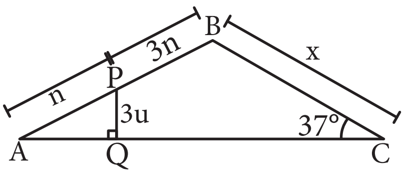
Trazamos la altura $\overline{BH}$, luego en el triángulo ABH (30° y 60°); $BH = 10\sqrt{3}$ u.

Finalmente, aplicando semejanza en los triángulos CPQ y CBH, tenemos:

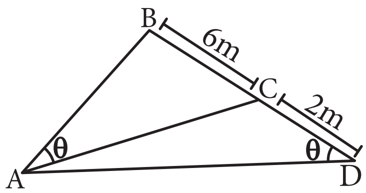
$$\frac{x}{\underset{2}{\cancel{10}}\sqrt{3}\,u} = \frac{2\cancel{n}}{\underset{1}{\cancel{5}}\cancel{n}}$$

$\therefore\ x = 4\sqrt{3}$ u

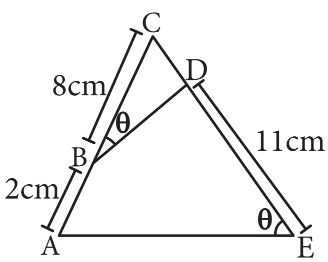
5. Calcular «x».



6. Calcular «AB».

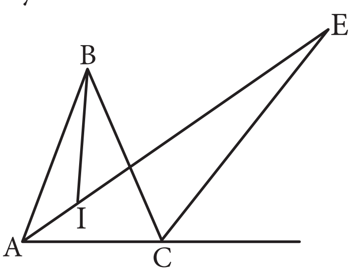


7. Calcular «CD»

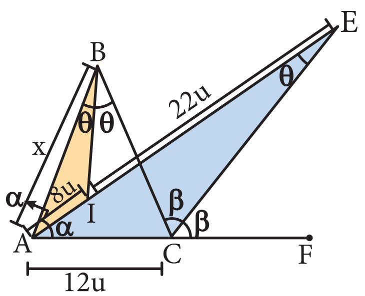


UNMSM

8. Calcular «AB», si: AC = 12u, AI = 8u y IE = 22u; además I es el incentro del triángulo ABC y $\overline{CE}$ es bisectriz exterior.



Resolución



Piden «x», si «I»: Incentro, entonces:

m∠BAI = m∠IAC = **α**

m∠ABI = m∠IBC = **θ**

Luego, $\overline{CE}$ es bisectriz exterior por tanto:

m∠BCE = m∠ECF = **β**

E ⇒ Excentro relativo a $\overline{BC}$

Propiedad:

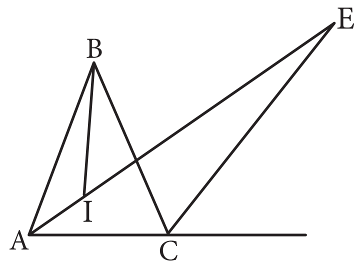
$$m\angle AEC = \frac{m\angle ABC}{2} = \frac{2\theta}{2}$$

⇒ m∠AEC = **θ**

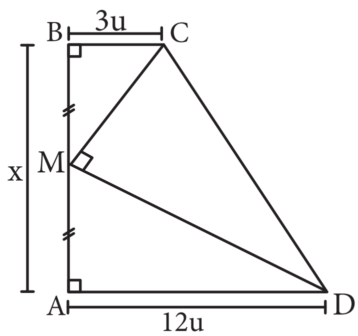
$\triangle ABI \sim \triangle AEC$

$$\frac{x}{30u} = \frac{8u}{12u} \quad \therefore\ x = 20u$$

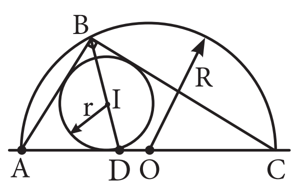
9. Calcular «IE», si AC = 5m, AI = 3m, AB = 6m; además I es incentro del triángulo ABC y $\overline{CE}$ es bisectriz exterior.



10. Calcula «x»



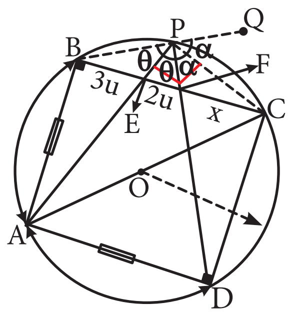
11. Calcula «$\frac{BI}{ID}$», si: O, I son centros, además R = 4r.



UNI

12. Calcula «FC», si ABCD es un cuadrilátero inscrito en una circunferencia, además AB = AD; BE = 3u; EF = 2u y $\overline{AC}$ es diámetro. P es un punto de $\overset{\frown}{BC}$, $\overline{PA}$ y $\overline{PD}$ cortan a $\overline{BC}$ en los puntos E y F, respectivamente.

Resolución



Piden «x»

como AB = AD

⇒ m$\overset{\frown}{AB}$ = m$\overset{\frown}{AD}$

⇒ m∠BPA = m∠APD = **θ**

Trazamos $\overline{PC}$ y el triángulo APC es rectángulo ($\overline{AC}$: diámetro)

Por tanto:

m∠APD + m∠DPC = 90°

Si: m∠DPC = **α**

⇒ **α** + **θ** = 90

Luego: B, P y Q son colineales

⇒ como **α** + **θ** = 90°

⇒ 2**α** + 2**θ** = 180°

∴ m∠CPQ = **α**

Finalmente: B, E, F y C conforman una cuaterna armónica

⇒ 3(x) = 2(3 + 2 + x)

∴ x = 10u

13. Calcula «EF», si ABCD es un cuadrilátero inscrito en una circunferencia, además AB = AD; BE = 6m; FC = 9m y $\overline{AC}$ es diámetro. P es un punto de $\overset{\frown}{BC}$, $\overline{PA}$ y $\overline{PD}$ cortan a $\overline{BC}$ en los puntos E y F, respectivamente.

14. Calcular «$\frac{AB + BC}{AC}$», si: I es incentro y G es baricentro del triángulo ABC, además $\overline{IG}$//$\overline{AC}$.