RELACIONES Y FUNCIONES

I. Par ordenado

(a ; b)
abscisa ← → ordenada

Importante

1. $(a;b) \neq (b;a)$
2. Si $(a;b) = (m;n)$
   $\rightarrow a = m \wedge b = n$

II. Producto Cartesiano

Dados dos conjuntos no vacíos A y B, definimos el producto cartesiano $(A \times B)$, como el conjunto de pares ordenados cuya primera componente pertenece al conjunto A y la segunda componente al conjunto B.

$$\boxed{A \times B = \{(a;b) / a \in A \wedge b \in B\}}$$

Ejemplo:
Dado $A = \{1; 2\}$ $B = \{1; 2; 3\}$

Entonces:
$A \times B = \{(1;1)\ (1;2)\ (1;3)\ (2;1)\ (2;2)\ (2;3)\}$
$B \times A = \{(1;1)\ (1;2)\ (2;1)\ (2;2)\ (3;1)\ (3;2)\}$

Conclusiones:
$\rightarrow$ $A \times B \neq B \times A$
$\rightarrow$ $n(A \times B) = n(B \times A)$
$\rightarrow$ $n(A \times B) = n(A) \times n(B)$

III. Relaciones

Dados dos conjuntos no vacios A y B, llamaremos relación o relación binaria de A en B, a todo subconjunto R del producto cartesiano $A \times B$, es decir:

$$\boxed{R \text{ es una relación de A en B} \Leftrightarrow R \subset A \times B}$$

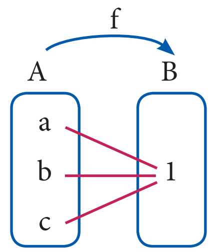
Ejemplo:
Si $A = \{2; 5; 7\} \wedge B = \{3; 4\}$
Determina la relación $R: A \rightarrow B$, definida de la siguiente forma:

$R = \{(x;y) \in A \times B / x > y\}$
$\rightarrow A \times B = \{(2;3)\ (2;4)\ (5;3)\ (5;4)\ (7;3)\ (7;4)\}$
$\rightarrow$ De el conjunto $A \times B$, tomamos los pares $(x;y)$ que cumplan con $x > y$
$R = \{(5;3)\ (5;4)\ (7;3)\ (7;4)\}$

IV. Funciones

Dados dos conjuntos no vacíos A y B, y una relación $F \subset A \times B$, definimos a F como función de A en B, si y solamente si para cada $x \in A$, existe un único elemento $y \in B$, de manera que $(x;y) \in F$.

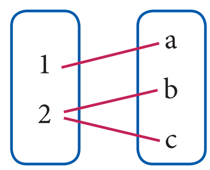
$$\boxed{F = \{(x;y) \in A \times B / \forall\, x \in A; \exists!\, y \in B\}}$$



Siendo $a \neq b \neq c$

$A \xrightarrow{f} B$

F es función



Siendo $a \neq b \neq c$

F no es función

Una función es una relación en la que para cada valor de la primera componente, existe un único valor de la segunda componente.

Observación

- Toda función es una relación, pero no toda relación es una función
- Si $(a;b)$ $f \rightarrow f(a) = b$
- Dominio de una función f, se denota por Df y se define
  $$D_f = \{x \in A / \exists!\, y, (x;y) \in f\}$$
- Rango de una función f, se denota por R_f
  $$R_f = \{y \in B / \exists\, x; (x;y) \in f\}$$

Trabajando en clase

Integral

1. Calcula el menor valor de xy, si:

$$(25;\ x+3) = (x^2;\ y+1)$$

2. si $A = \{1;\ 2;\ 3;\ 4\}$, indica el número de elementos de la siguiente relación

$$R = \{(x;y) \in A^2 /\ x + y < 4\}$$

3. Calcula el dominio y rango de F, si F es una función

$$F = \{(7;a+b)(a;b^2)(7;3)(5;1)(5;a-b)\}$$

PUCP

4. Calcula la suma de elementos del rango de la función.

$$F = \{(4;3)(a;-1)(2;a^2)(7;a-2)(2;a+12)]$$

Resolución

Sabemos que F es una función, entonces

$a^2 = a + 12$

$a^2 - a - 12 = 0$

$a \quad -4$

$a \quad +3$

$(a-4)(a+3) = 0$ — $a = 4$; $a = 3$; analizando:

$\Rightarrow a = 4 \Rightarrow F = \{(4;3)(4;-1)(2;16)(7;2)\}$

No cumple que F sea función

$\Rightarrow a = -3 \Rightarrow F = \{(4;3)(-3;-1)(2;9)(7;-5)\}$

Cumple que F sea función

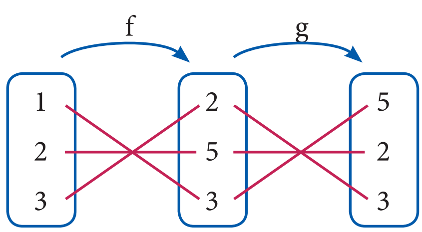
$R_f = \{3;\ -1;\ 9;\ -5\}$

$\therefore$ Suma de elementos del rango = 6

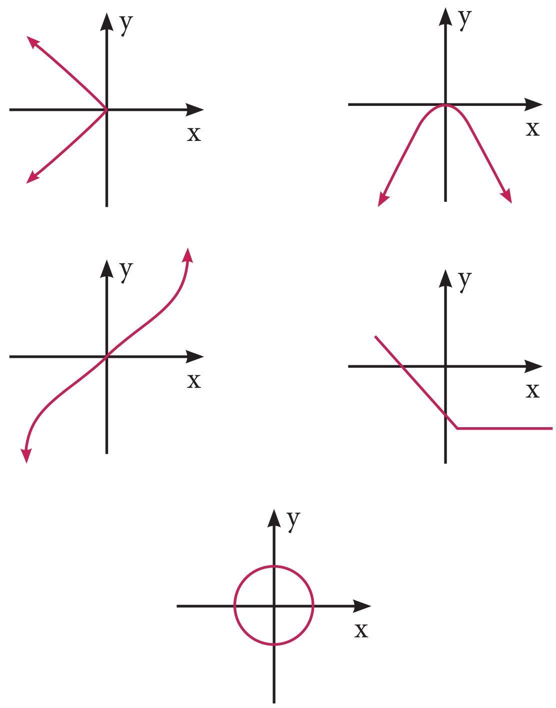
5. Calcula la suma de elementos del dominio de la función

$$F = \{(3;1)\ (b;4)\ (3;a^2)\ (5;4)\ (5;a+b\}$$

6. Calcula $\dfrac{f(2)+g(f(2))}{f(3)+g(f(3))}$ del diagrama que se muestra



7. ¿Cuáles de los siguiente gráficos no representa a una función?



UNMSM

8. Si $f(x-3) = x^2 + 5x - 2$, uno de los valores de K, tal que $f(k) = k + 1$ es:

Resolución

$f(k) = f(x-3) \Rightarrow k = x - 3$

$$\boxed{x = k + 3}$$

$$\underbrace{f(k)}_{k+1} = \underbrace{(k+3)^2 + 5(k+3) - 2}_{k^2+11k+22}$$

$0 = k^2 + 10k + 21$

$0 = (k+7)(k+3)$

$\therefore k = -7 \vee k = -3$

9. Si $f(x-2) = x^2 + 3x - 2 \wedge f(k) = k + 1$

Calcula el valor de $k^2 + 6k + 12$

10. Sea $f(x) = \begin{cases} 3x^2;\ x < 3 \\ 2x - 5;\ x \geq 3 \end{cases}$

Calcula el valor de $f(5) + f(2) - f(3)$

11. Si $f(x) = \begin{cases} 2x + a;\ x < 5 \\ x + b;\ x \geq 5 \end{cases}$

Además $f(0) = 4 \wedge f(8) = 10$

Calcula el valor de $a^2 + b^2$

UNI

12. Si f es una función real tal que $f(x-1) = x^2 + 3$, entonces para $a \neq 0$.

Calcula el valor de $\dfrac{f(a+1) - f(1)}{a}$

Resolución

$f(x-1) = f(a+1) \Rightarrow x - 1 = a + 1$

$\boxed{x = a + 2}$

$\Rightarrow f(a+1) = (a+2)^2 + 3 = a^2 + 4a + 7$

$f(x-1) = f(1) \Rightarrow x - 1 = 1$

$x = 2$

$\Rightarrow f(1) = 2^2 + 3 = 7$

$$\therefore \frac{f(a+1) - f(1)}{a} = \frac{a^2 + 4a + \cancel{7} - \cancel{7}}{a}$$

$$\frac{f(a+1) - f(1)}{a} = a + 4$$

13. Si los puntos (0;0) y (−1;9) pertenecen a la función $f(x) = m(x-2)^2 - p$

Calcula el valor de $m + p$

14. Si $[x^b] = bx^{b-1}$ y $f(x+1) = [x^2] + 3[x^3] + f(x)$ calcula $f(2)$ si se sabe que $f(4) = 2$

UNI 2003-II