RELACIONES

CONCEPTOS PREVIOS

1. Par ordenado

Es el conjunto formado por dos elementos dispuestos en un determinado orden. Se denota:

(a;b), donde $\begin{cases} \text{a: primera componente (abscisa)} \\ \text{b: segunda componente (ordenada)} \end{cases}$

Se lee: par ordenado «a» punto y coma «b»

2. Propiedades del par ordenado

1. Si:

$$\boxed{(a;b) = (c;d) \Leftrightarrow a = c \wedge b = d}$$

2. Si:

$$\boxed{(a;b) \neq (c;d) \Rightarrow a \neq c \vee b \neq d}$$

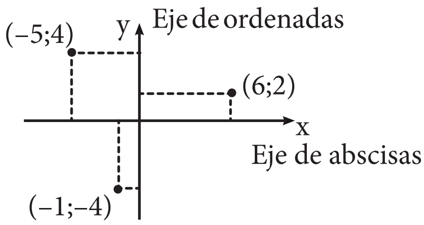
Ejemplo:
Determina «xy» si:

$$(x + 2; 7) = (6; y - 2)$$

Resolución:
Por igualdad de pares ordenados:
$x + 2 = 6 \wedge 7 = y - 2$
$\Rightarrow x = 4 \wedge y = 9$
$\therefore xy = 36$

3. Representación gráfica de un par ordenado

Par ordenado:



4. Producto cartesiano

Dados los conjuntos no vacíos, A y B, definimos el producto cartesiano de A por B, denotado por A × B, al conjunto de pares ordenados cuya primera componente le pertenece al conjunto A y la segunda componente le pertenece al conjunto B; esto es:

$$\boxed{A \times B = \{(a; b)/a \in A \wedge \in B\}}$$

5. Propiedades del producto cartesiano

1. El producto cartesiano no es conmutativo; es decir:

$$\boxed{A \times B \neq B \times A}\text{; } (A \neq B)$$

2. El número de elementos del producto cartesiano A × B es igual al producto del número de elementos del conjunto A por el número de elementos del conjunto B; es decir:

$$\boxed{n(A \times B) = n(A).n(B)}$$

Nota:
n(A): número de elementos del conjunto A.
Ejemplo:
Sean los conjuntos A = {1; 2}, B = {3; 4; 5}
Cuyos productos cartesianos:
$A \times B = \{(1; 3), (1; 4), (1; 5), (2; 3), (2; 4), (2; 5)\}$ y
$B \times A = \{(3; 1), (3; 2), (4; 1), (4; 2), (5; 1), (5; 2)\}$
Entonces:
$n(A \times B) = n(A).n(B) = 2.3 = 6$
$n(B \times A) = n(B).n(A) = 3.2 = 6$
$\Rightarrow \boxed{n(A \times B) = n(B \times A)}$

6. Relaciones

Dados los conjuntos no vacíos A y B, llamaremos relación o relación binaria de A en B, a todo subconjunto R del producto cartesiano A × B; es decir:

$$\boxed{\text{R es relación de A en B} \Rightarrow R \subset A \times B}$$

Ejemplo: Sean A = {3; 5} y B = {4; 6}, encuentra la relación R: A → B definida por:

$$R = \{(x; y) \in A \times B/\underbrace{x < y}_{\text{regla de Correspondencia}}\}$$

Resolución:
Primero calculamos el producto cartesiano A × B:
$A \times B = \{(3; 4), (3; 6), (5; 4), (5; 6)\}$
De este conjunto tomamos los pares (x; y), que cumplan con $x < y$.
(3; 4), (3; 6), (5; 6)
La relación pedida es: R = {(3; 4), (3; 6), (5; 6)}

7. Dominio y rango de una relación

❖ **Dominio de R (conjunto de partida)**

Es el conjunto que tiene por elementos a todas las primeras componentes de los pares ordenados pertenecientes a la relación; esto es:

$$\boxed{D_R = \{x/(x; y) \in R\}}$$

❖ **Rango de R (conjunto de llegada)**

Es el conjunto que tiene por elementos a todas la segundas componentes de los pares ordenados pertenecientes a la relación; esto es:

$$\boxed{R_R = \{y/(x; y) \in R\}}$$

Ejemplo:

Dado $A = \{-2; 0; 2\}$ y $B = \{1; 3\}$

Determina el dominio y el rango de la relación $R: A \rightarrow B$ definida por:

$$R = \{(x, y) \in A \times B \;/\; y = \underbrace{x + 3}_{\text{Regla de correspondencia}}\}$$

Resolución:

Primero calculamos el producto cartesiano $A \times B$.

$A \times B = \{(-2; 1), (-2; 3), (0; 1), (0; 3), (2; 1), (2; 3)\}$

De este conjunto tomamos los pares (x, y), que cumplan con $y = x + 3$.

La relación pedida es $R = \{(-2; 1), (0; 3)\}$

Finalmente, el dominio es $D_R = \{-2; 0\}$

El rango es $R_R = \{1; 3\}$

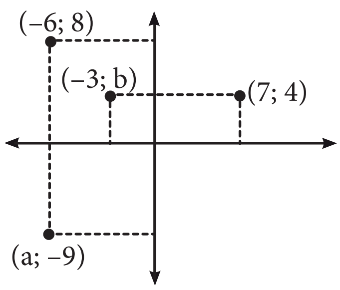
Trabajando en clase

Integral

1. Si $(x - 4; -5) = (-5; y - 8)$,
calcula: «y^x»

2. Si $(2a - b; 8) = (6; 5a + b)$,
calcula: «ab»

3. Según la figura, calcula «a + b»



PUCP

4. Si $A = \{2; 5\}$ y $B = \{-1; 3; -7\}$, calcula:

$$A \times B \wedge B \times A$$

Resolución:

❖ Por dato: $A = \{2; 5\}$, $B = \{-1; 3; -7\}$

❖ Formando los pares ordenados; ¡observa las flechas!

$\therefore A \times B = \{(2;-1),(2;3),(2;-7),(5;-1),(5;3),(5;-7)\}$

❖ Por dato: $B = \{-1; 3; -7\}$, $A = \{2; 5\}$

❖ Formando los pares ordenados

¡Observa las flechas!

$\therefore B \times A = \{(-1;2),(-1;5),(3;2),(3;5),(-7;2),(-7;5)\}$

5. Si $A = \{-5; 2\}$ y $B = \{-1; 0; 4\}$, calcula:

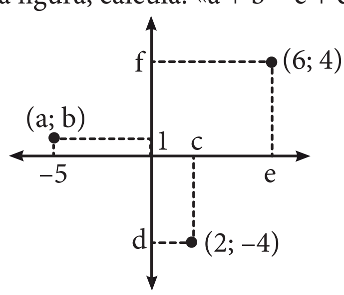
$$A \times B \wedge B \times A$$

6. Si:

$M = \{x \in \mathbb{N}/2 < x < 5\}$ y $N = \{x \in \mathbb{Z}/-1 \leq x < 1\}$,

calcula: $M \times N$

7. Según la figura, calcula: «a + b − c + d + e − f»



UNMSM

8. Si $A = \{-5; -3; 3\}$ y $B = \{-1; 1; 2\}$, calcula el dominio de la relación:

$$R = \{(x,y) \in A \times B / xy > 0\}$$

Resolución:

❖ Hallamos el producto cartesiano:

$A \times B = \{(-5;-1),(-5;1),(-5;2),(-3;-1),(-3;1),(-3;2),(3;-1),(3;1),(3;2)\}$

- Seleccionamos los pares ordenados que cumplen la condición:
  $(-5; -1)$ porque: $(-5)(-1) = 5 \wedge 5 > 0$
  $(-3; -1)$ porque: $(-3)(-1) = 3 \wedge 3 > 0$
  $(3; 1)$ porque: $(3)(1) = 3 \wedge 3 > 0$
  $(3; 2)$ porque: $(3)(2) = 6 \wedge 6 > 0$
  Entonces:
  $R = \{(-5; -1), (-3; -1), (3; 1), (3; 2)\}$
  $\therefore \text{DomR} = \{-5; -3; 3\}$

9. Si $A = \{3; 4; 5; 6\}$ y $B = \{6; 7; 8\}$, calcula el rango de la relación:
$$R = \{(x; y) \in A \times B / x + 2 = y\}$$
Además, indica $n(R)$.

10. Si $A = \{2; 6; 8\}$, $B = \{3; 5; 7\}$, calcula el dominio de la relación $R = \{(x; y) \in A \times B / x < y\}$, e indica $n(R)$.

11. Si $A = \{-4; 5; 6\}$ y $B = \{-8; 2\}$, calcula M.N e indica si M es la suma de todos los elementos del rango y M es la suma de todos los elementos del dominio:
$$R = \{(x; y) \in A \times B / x + y = -2\}$$

UNI

12. Calcula el conjunto $A \times B$. Si:
$A = \{x \in \mathbb{Z} / -1 < x \leq 2\}$
$B = \left\{\frac{x+1}{2} / -3 < x < 1; x \in \mathbb{Z}\right\}$

Resolución:

- Calculamos el conjuntos A, por extensión:
  $A = \{0; 1; 2\}$
- En el conjunto B, cada elemento es el valor numérico que adquiere la expresión «$\frac{x+1}{2}$». Cuando «x» toma valores enteros mayores que -3, pero menores que 1. Así:
  $x = -2 \Rightarrow \frac{-2+1}{2} = -\frac{1}{2}$
  $x = -1 \Rightarrow \frac{-1+1}{2} = 0$
  $x = 0 \Rightarrow \frac{0+1}{2} = \frac{1}{2}$
  Entonces, tenemos:
  $B = \left\{-\frac{1}{2}; 0; \frac{1}{2}\right\}$
- Calculamos $A \times B$, teniendo en cuenta lógicamente a los conjuntos A y B.
  $$A \times B = \left\{\left(0; -\frac{1}{2}\right), (0; 0), \left(0; \frac{1}{2}\right), \left(1; -\frac{1}{2}\right); (1; 0)\right.$$
  $$\left.\left(1; \frac{1}{2}\right), \left(2; -\frac{1}{2}\right); (2; 0); \left(2; \frac{1}{2}\right)\right\}$$

13. Si $H = \{x^2 + 1 / -2 \leq x \leq 0; x \in \mathbb{Z}\}$
$J = \left\{\frac{x+3}{2} / 1 \leq x \leq 4; x \in \mathbb{N}\right\}$
calcula: $H \times J$

14. Si:
$F = \{3; 4; 5; 6; 9\}$
$G = \{10; 12; 25; 27\}$
Calcula:
$R = \{(x;y) \in F \times G / x \text{ es divisor de } y\}$