RELACIONES MÉTRICAS EN TRIÁNGULOS OBLICUÁNGULOS

1. TEOREMA DE EUCLIDES

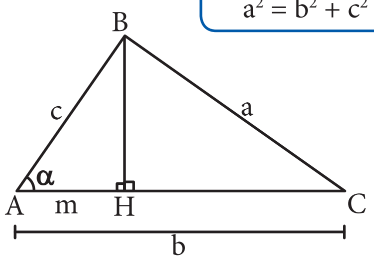
1er caso:

En todo triángulo, el cuadrado de la longitud del lado que se opone a un ángulo agudo es igual a la suma de cuadrados de los otros dos, menos el doble producto de uno de ellos, por la longitud de la proyección del otro sobre él.

Sea ABC, el triángulo; donde $0° < \alpha < 90°$. $\overline{AH}$: proyección de $\overline{AB}$ sobre $\overline{AC}$.

Entonces:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bm$$



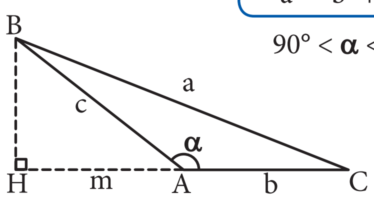
2do Caso:

En todo triángulo obtusángulo, el cuadrado de la longitud del lado opuesto al ángulo obtuso, es igual a la suma de cuadrados de los otros dos, más el doble producto de uno de ellos por la proyección del otro sobre él.

Luego:

$$a^2 = b^2 + c^2 + 2bm$$

$90° < \alpha < 180°$



$\overline{AH}$: proyección de $\overline{AB}$, sobre $\overline{AC}$.

2. TEOREMA DE HERÓN

En todo triángulo, la longitud de una altura, es igual al doble de la inversa de la longitud del lado sobre el cual cae, por la raíz cuadrada del producto del semiperímetro y su diferencia con la longitud de cada lado.

Consideremos los gráficos adjuntos; en cada caso, el triángulo en mención es ABC.

El semiperímetro p: $p = \dfrac{a+b+c}{2}$

La fórmula para el Teorema de Herón, con relación a la altura $\overline{BH}$.

Fig 1

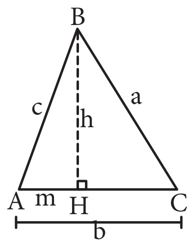
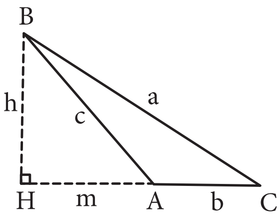


Fig 2



$$h = \frac{2}{b}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

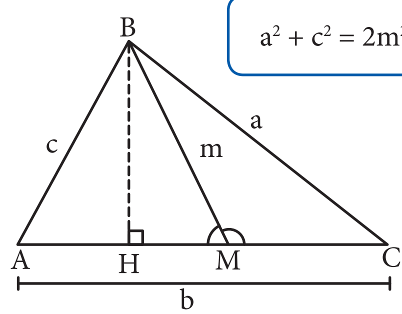
3. TEOREMA DE LA MEDIANA

En todo triángulo, la suma de cuadrados de las longitudes de dos lados, es igual a dos veces el cuadrado de la longitud de la mediana hacia el menor lado, más la mitad del cuadrado de la longitud de dicho lado.

Sea $\overline{BM}$ una mediana del triángulo ABC.

Entonces:

$$a^2 + c^2 = 2m^2 + \frac{b^2}{2}$$

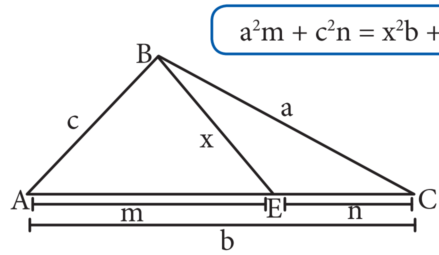


4. TEOREMA DE STEWART

En todo triángulo, la longitud de una ceviana interior, puede evaluarse con la siguiente expresión:

iABC → $\overline{BE}$, ceviana interior

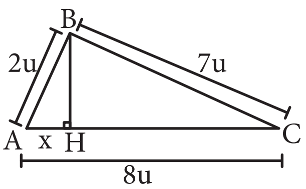
$$a^2m + c^2n = x^2b + mnb$$



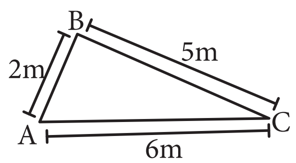
Trabajando en clase

Integral

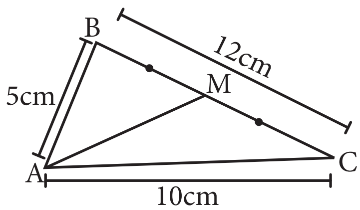
1. Calcula «x».



2. Calcular la longitud de la menor altura del triángulo ABC.

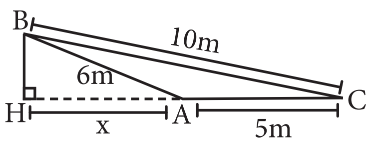


3. Calcula «AM».

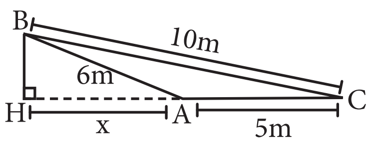


PUCP

4. Calcular «x»



Resolución



Aplicando el teorema de Euclídes para un triángulo obtuso

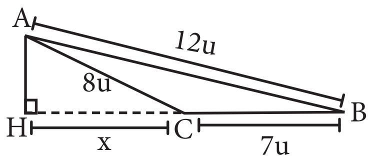
$10^2 = 6^2 + 5^2 + 2(5)x$

$100 = 36 + 25 + 10x$

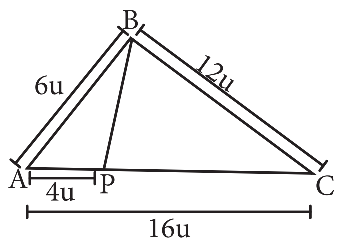
$39 = 10x$

$\therefore\ x = 3{,}9$ m

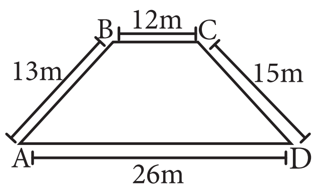
5. Calcular «x».



6. Calcular «BP»

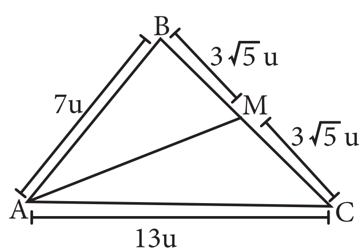


7. Calcular la longitud de la altura del trapecio, si $\overline{BC}//\overline{AD}$.

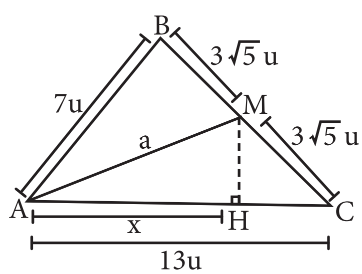


UNMSM

8. Calcular la longitud de la proyección de la mediana $\overline{AM}$ sobre el lado $\overline{AC}$.



Resolución



Piden «x»

Sea AM = a

Calculando «a», por tanto aplicamos el teorema de la mediana en el triángulo ABC

$7^2 + 13^2 = 2a^2 + \dfrac{(6\sqrt{5})^2}{2}$

$49 + 169 = 2a^2 + \dfrac{180}{2}$

$128 = 2a^2$

$\Rightarrow a = 8u$

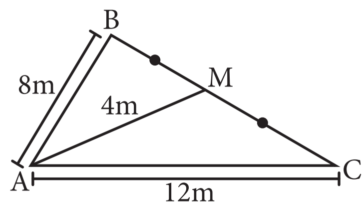
Finalmente, aplicando el teorema de Euclides en el triángulo AMC

$(3\sqrt{5})^2 = 13^2 + a^2 - 2(13)x$

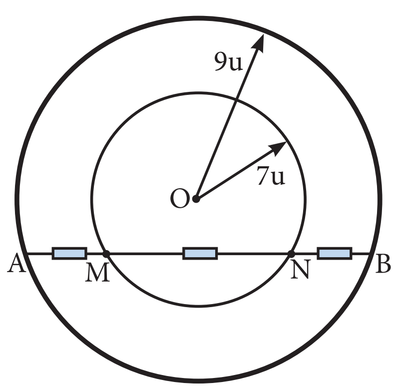
$45 = 169 + 64 - 26x$

$\therefore\ x = \dfrac{94}{13}u$

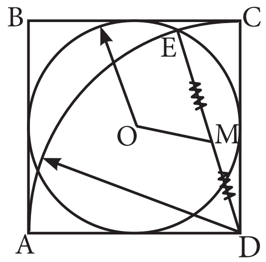
9. Calcular la longitud de la proyección de la mediana $\overline{AM}$ sobre el lado $\overline{AC}$



10. Calcular «AB».

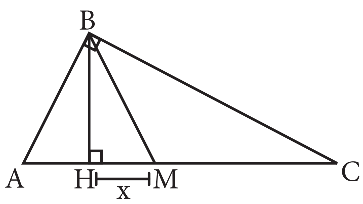


11. Calcular «OM», si el lado del cuadrado mide 8u, ademas O es el centro de la circunferencia.



UNI

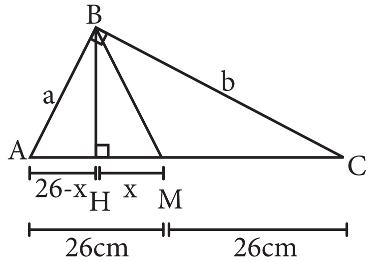
12. La hipotenusa de un rectángulo mide 52 cm y la relación de los cuadrados de los catetos es igual a $\frac{5}{8}$. Calcula «x», Si $\overline{BM}$ es la mediana relativa a la hipotenusa.



Resolución

Dato:

$\frac{a^2}{b^2} = \frac{5}{8}$...(1)



Sean: AB = a y BC = b

* Por RM en el triángulo ABC

& $a^2 = (26 - x)52$

& $b^2 = (26 + x)52$

Reemplazando en la ecuación (1)

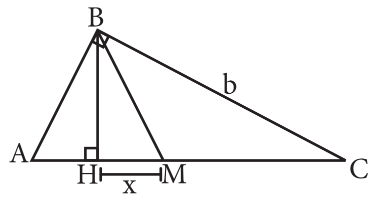
$$\frac{(26-x)\cancel{52}}{(26+x)\cancel{52}} = \frac{5}{8}$$

$5x + 130 = 208 - 8x$

$13x = 78$

$\therefore x = 6$ cm

13. La hipotenusa de un triángulo rectángulo mide 40 cm y la relación de los cuadrados de los catetos es igual a $\frac{3}{5}$. Calcular «x», si $\overline{BM}$ es la mediana relativa a la hipotenusa.



14. Calcular «x», si O_1,O_2 y O_3 son centros.