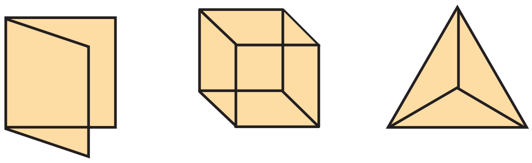
RECTAS Y PLANOS EN EL ESPACIO

I. GEOMETRÍA DEL ESPACIO

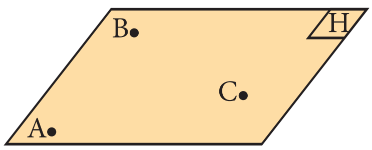
Tiene por objeto, el estudio de las figuras sólidas o del espacio, es decir, de las figuras cuyos puntos no pertenecen todas a un mismo plano, sino al espacio tridimensional, por ejemplo: el ángulo diedro, el cubo, la pirámide, la esfera, etc.



II. RECTAS Y PLANOS EN EL ESPACIO

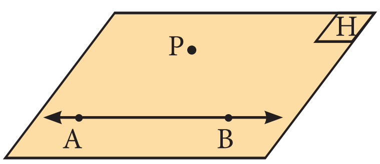
Teorema 1

Tres puntos cualesquiera, no colineales, determinan un plano. Así, los puntos no colineales A, B, C determinan el plano H.



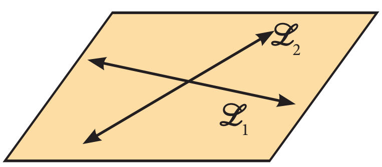
Teorema 2

Una recta y un punto exterior a ella, determinan un plano. Así, la recta $\overleftrightarrow{AB}$ y el punto P situado fuera de ella, determinan el plano H.



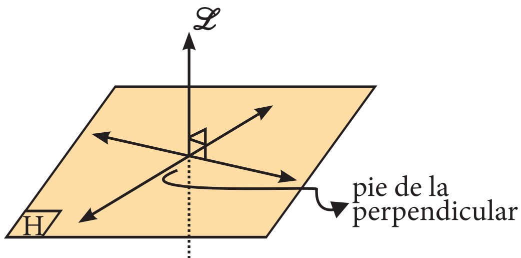
Teorema 3

Dos rectas que se intersectan en el espacio determinan un plano.



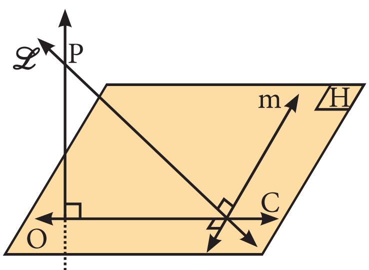
Recta perpendicular a un plano.

Se define como aquella recta perpendicular a todas las rectas contenidas en el plano.



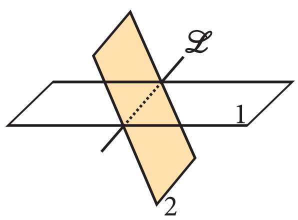
Teorema de las tres perpendiculares

Si desde el pie de una recta perpendicular a un plano, se traza otra perpendicular a una recta cualquiera dada en el plano, toda recta, que pasa por un punto cualquiera de la primera y el punto de intersección de las 2 últimas, es perpendicular a la recta dada en el plano.

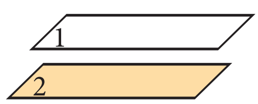


1. Posiciones relativas de dos planos.

- Secantes, en este caso tiene una recta común que se llama «intersección de los dos planos».
- Paralelos, cuando no tienen ningún punto en común.



Cortándose



Paralelos

2. Posiciones relativas de un plano con una recta

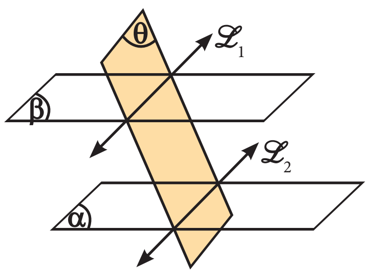
- ❖ Secantes, en este caso tienen un punto en común.
- ❖ Paralelas, en este caso no tienen ningún punto en común.

3. Posiciones relativas de dos rectas en el espacio.

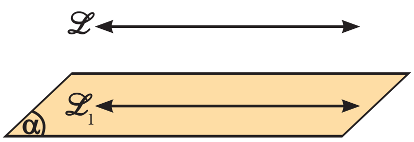
- ❖ Secantes, en este caso tienen un punto en común.
- ❖ Paralelas, en este caso están en un mismo plano y no tienen ningún punto en común.
- ❖ Cruzadas, en este caso no están en un mismo plano y no tienen ningún punto en común. También se les llama rectas alabeadas.

4. Teoremas importantes

a. «Las intersecciones $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_1}$ y $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_2}$ de dos planos paralelos α y β con un tercer plano θ son rectas paralelas» ($\overleftrightarrow{\mathscr{L}_1} \,//\, \overleftrightarrow{\mathscr{L}_2}$)

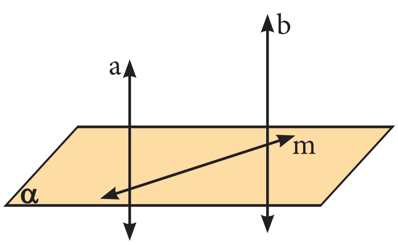


b. «Si dos rectas $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}$ y $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_1}$ son paralelas, entonces todo plano α que contenga una de las dos rectas es paralelo a la otra recta».



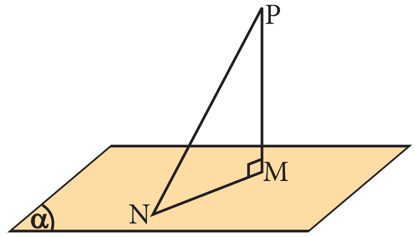
$\overleftrightarrow{\mathscr{L}_1} \,//\, \overleftrightarrow{\mathscr{L}_2}$

c. «Si un plano α corta a una de dos rectas a y b paralelas, corta también a la otra».



5. Distancia de un punto P a un plano α.

Es el segmento $\overline{PM}$ perpendicular trazado del punto P al plano. Se llama así por ser menor que cualquier otro segmento $\overline{PN}$ que une el punto P con cualquier otro punto del plano.

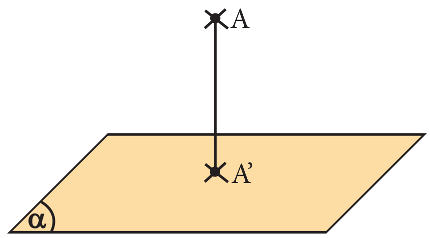


6. Distancia entre dos planos α y β paralelos.

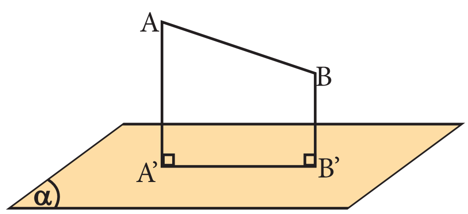
Es el segmento $\overline{MN}$ perpendicular comprendido entre los 2 planos. O también es la distancia de un punto cualquiera M de uno de ellos al otro.

7. Proyección de un punto A sobre un plano α.

La proyección de un punto A sobre un plano α es el pie A' de la perpendicular trazada desde el punto A al plano.

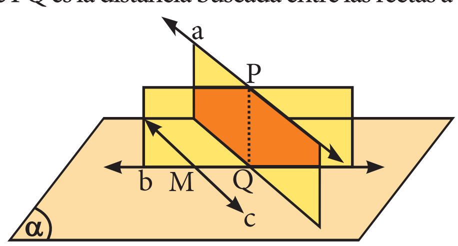


La proyección de una línea $\overline{AB}$ sobre un plano α es el conjunto $\overline{A'B'}$, formado por las proyecciones de todos los puntos de la línea.



8. Distancia entre dos rectas que se cruzan

Es el segmento perpendicular común comprendido entre ambas rectas. Para trazar esta distancia, sean a y b las dos rectas alabeadas. Por un punto M de una de ellas (b) se traza la recta c paralela a la otra (a), la cual determina con b el plano α. Se traza ahora el plano β, perpendicular al plano α, el cual corta a la recta a en el punto P. trazamos desde P la perpendicular $\overline{PQ}$ al plano α, tenemos que $\overline{PQ}$ es la distancia buscada entre las rectas a y b.



Trabajando en clase

Integral

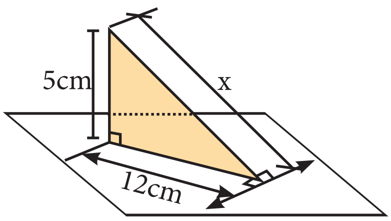
1. ¿Cuántos planos se determinan con 10 puntos en el espacio?

2. ¿Cuántos planos se forman con 12 rectas secantes en el espacio?

3. ¿Cuántos planos se determinan con 8 rectas paralelas en el espacio?

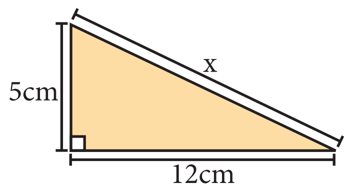
Católica

4. Calcula «x»



Resolución:

Según la figura, tenemos:



Por el teorema de Pitágoras:

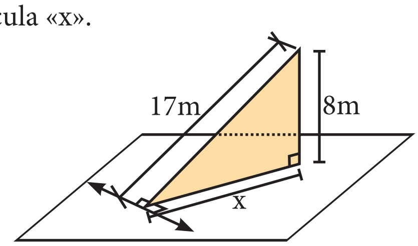
$x^2 = (5\text{ cm})^2 + (12\text{ cm})^2$

$x^2 = 25\text{ cm}^2 + 144\text{ cm}^2$

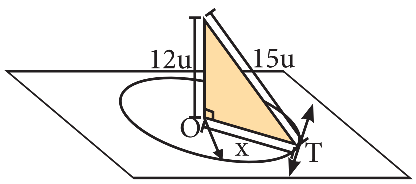
$x^2 = 169\text{ cm}^2$

$x = 13\text{ cm}$

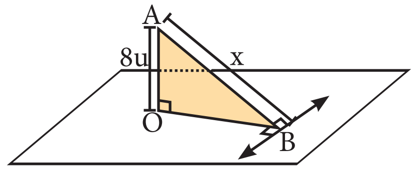
5. Calcula «x».



6. Calcula «x» si T es punto de tangencia.

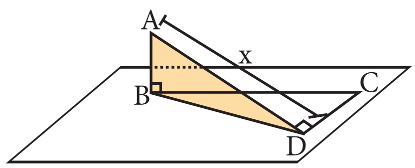


7. Calcula «x» si el área de la región triangular ABC es 24 u^2.



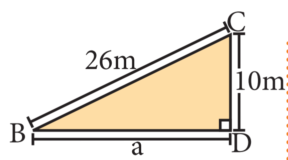
UNMSM

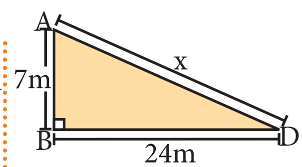
8. Calcula «x» si AB = 7 m, BC = 26 m, DC = 10 m, $\overline{BD} \perp \overline{DC}$.



Resolución:

De las figuras tenemos:





Por el teorema de Pitágoras:

$(26\text{ m})^2 = (10\text{ m}^2) + (a)^2$

$676\text{ m}^2 = 100\text{ m}^2 + a^2$

$576\text{ m}^2 = a^2$

$a = 24\text{ m}$

Por el teorema de Pitágoras:

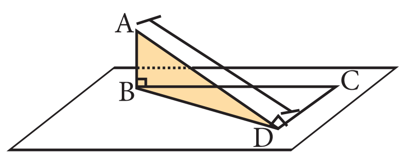
$x^2 = (7\text{ m})^2 + (24\text{ m}^2)$

$x^2 = 49\text{ m}^2 + 576\text{ m}^2$

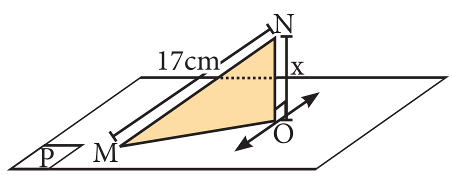
$x^2 = 625\text{ m}^2$

$x = 25\text{ m}$

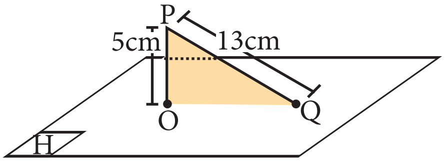
9. Calcula «x» si AB = 9 m, BC = 20 m, DC = 16 m $\overline{BD} \perp \overline{DC}$.



10. Calcula «x» si se sabe que la proyección de $\overline{MN}$ sobre P mide 8 cm.

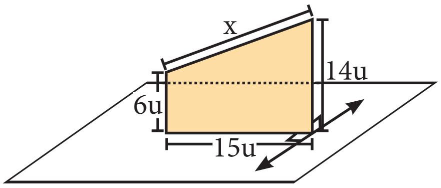


11. Calcula «x» si se sabe que la proyección PQ sobre H es «x».



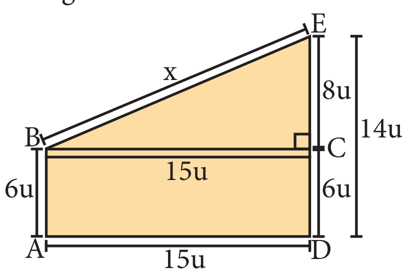
UNI

12. Calcula «x»

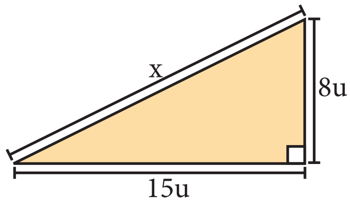


Resolución:

Según la figura tenemos:



▭ ABCD: Rectángulo



Por el teorema de pitágoras:

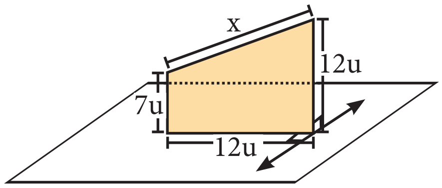
$x^2 = (8\ u)^2 + (15\ u)^2$

$x^2 = 64\ u^2 + 225\ u^2$

$x^2 = 289\ u^2$

$x = 17\ u$

13. Calcula «x».



14. Calcula «x» si se sabe que AB = BC = 10 cm.