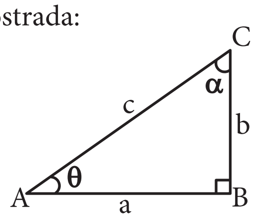
RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE ÁNGULOS AGUDOS

Triángulo rectángulo

En la figura mostrada:



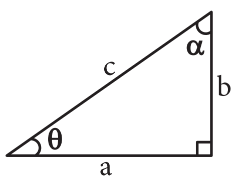
$\overline{AC}$: hipotenusa $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$: catetos

Teorema de Pitágotas

$$\boxed{a^2 + b^2 = c^2}$$

Razón trigonométrica

La razón trigonométrica de un ángulo perteneciente a un triángulo rectángulo, se define como, el cociente que se obtiene al dividir las medidas de las longitudes de dos de los lados del triángulo rectángulo con respecto del ángulo agudo.



Podemos definir las razones trigonométricas de θ del modo siguiente:

$$\text{Sen } \theta = \frac{\text{Cateto opuesto al ángulo } \theta}{\text{Hipotenusa}} = \frac{b}{c}$$

$$\text{Cos } \theta = \frac{\text{Cateto adyacente al ángulo } \theta}{\text{Hipotenusa}} = \frac{a}{c}$$

$$\text{Tg}\theta = \frac{\text{Cateto opuesto al ángulo } \theta}{\text{Cateto adyacente al ángulo } \theta} = \frac{b}{a}$$

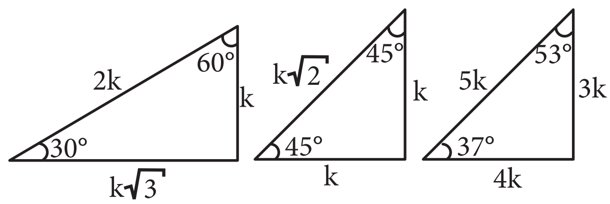
$$\text{Ctg}\theta = \frac{\text{Cateto adyacente al ángulo } \theta}{\text{Cateto opuesto al ángulo } \theta} = \frac{a}{b}$$

$$\text{Sec}\theta = \frac{\text{Hipotenusa}}{\text{Cateto opuesto al ángulo } \theta} = \frac{c}{a}$$

$$\text{Csc}\theta = \frac{\text{Hipotenusa}}{\text{Cateto opuesto al ángulo } \theta} = \frac{c}{b}$$

Razones trigonométricas de los ángulos agudos: 30°, 60°, 45°, 37° y 53°

Las razones trigonométricas de estos ángulos se obtienen a partir de los siguientes triángulos rectángulos.



De los triángulos anteriores, se obtiene:

RT \ Ángulo	30°	37°	45°	53°	60°
Sen	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
Cos	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{2}$
Tg	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\frac{3}{4}$	1	$\frac{4}{3}$	$\sqrt{3}$
Ctg	$\sqrt{3}$	$\frac{4}{3}$	1	$\frac{3}{4}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
Sec	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$\frac{5}{4}$	$\sqrt{2}$	$\frac{5}{3}$	2
Csc	2	$\frac{5}{3}$	$\sqrt{2}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$

Razones trigonométricas recíprocas

Siendo θ un ángulo agudo, se cumple:

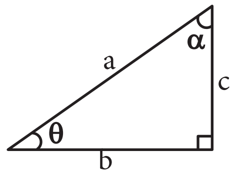
$$\text{Csc}\theta = \frac{1}{\text{Sen}\theta} \Rightarrow \text{Sen}\theta.\text{Csc}\theta = 1$$

$$\text{Sec}\theta = \frac{1}{\text{Cos}\theta} \Rightarrow \text{Cos}\theta.\text{Sec}\theta = 1$$

$$\text{Ctg}\theta = \frac{1}{\text{Tg}\theta} \Rightarrow \text{Tg}\theta.\text{Ctg}\theta = 1$$

Razones trigonométricas de ángulos complementarios

Dos ángulos agudos se llaman complementarios si su suma es igual a la medida de un ángulo recto.



Según la figura:

θ y **α**: son ángulos complemetarios (**θ** + **α** = 90°)

Entonces se cumple:

Sen**θ** = Cos**α**	Cos**θ** = Sen**α**
Tg**θ** = Ctg**α**	Ctg**θ** = Tg**θ**
Sec**θ** = Csc**α**	Csc**θ** = Sec**α**

Debido a estas relaciones, las siguientes razones:

- Seno y Coseno
- Tangente y Cotangente
- Secante y Cosecante

Se llaman corrazones trigonométricas una de la otra.

Trabajando en clase

Integral

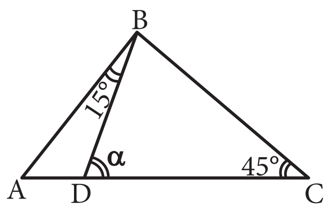
1. Si: Sen(12x – 15°).Csc(6x + 15°) = 1, calcula el valor de «x».

2. Si Cos**θ** = $\dfrac{9}{41}$. Calcula «Tg**θ**»

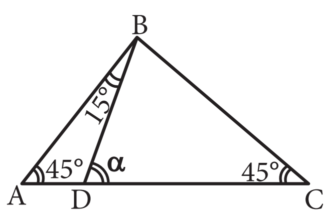
3. Si Sen(2**β** + 15°) = Cos(**β** + 30°), calcula «Ctg2**β**».

PUCP

4. Calcula «Ctg**α**». Si AB = BC.



Resolución:



Dato:

AB = BC, entonces:

m∢BAD = m∢BCD = 45° luego en el **Δ**ABD.

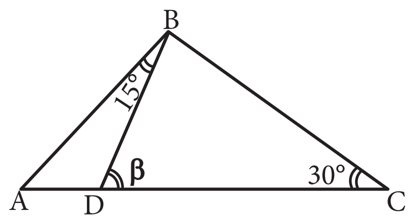
Por ángulo externo.

α = 45° + 15°

α = 60°

Piden: Ctg**α** = Ctg60° = $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

5. Calcula «Tg**β**». Si AB = BC.



6. Si en el triángulo rectángulo ABC, recto en «A», a = 7m; c = $2\sqrt{6}$ m, calcula «SenB».

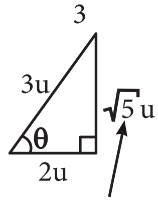
7. Calcula «CtgB» en un triángulo rectángulo ABC (recto en A), si se sabe que a = 13 u, b = 12 u.

UNMSM

8. Si Cos**θ** = 0,66666..., calcula «P».
(P = $\sqrt{5}$(Ctg**θ** + Csc**θ**))

Resolución:

Como Cos**θ** = $0,\widehat{6} = \dfrac{2}{3}$, entonces:



Por pitágoras

Luego: Ctg**θ** = $\dfrac{2}{\sqrt{5}}$ y Csc**θ** = $\dfrac{3}{\sqrt{5}}$

Entonces, reemplazamos en P:

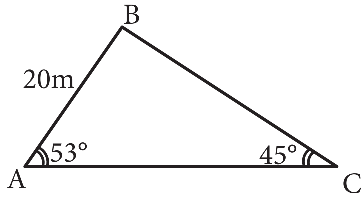
$$P = \sqrt{5}\left(\frac{2}{\sqrt{5}} + \frac{3}{\sqrt{5}}\right) = \sqrt{5}\left(\frac{5}{\cancel{\sqrt{5}}}\right)$$

∴ P = 5

9. Si Senα = 0,888..., calcula «Q»

$(Q = \sqrt{17}(Tg\alpha + Sec\alpha))$

10. Calcula «AC».



11. Calcula «x», si $Cos(5x + 10°) = \frac{1}{2}$ («x» es agudo)

UNI

12. Si a y b son dos ángulos agudos de modo que $\frac{\alpha}{3} = \frac{\beta}{6}$, además son complementarios; calcula:

$$E = Ctg\left(\frac{\alpha + 2\beta}{5}\right)$$

Resolución:

Como $\frac{\alpha}{3} = \frac{\beta}{6} = k$ $\begin{cases} \alpha = 3k \\ \beta = 6k \end{cases}$

Como son complementarios,

$\alpha + \beta = 90°$
$9k = 90$
$k = 10$

Entonces, $\begin{cases} \alpha = 3k \\ \beta = 6k \end{cases}$

$E = Ctg\left(\frac{30 + 120}{5}\right)$

$E = Ctg30°$

$E = \sqrt{3}$

13. Si α y β son dos ángulos agudos de modo que $\frac{\alpha}{4} = \frac{\beta}{5}$ además son complementarios, calcula:

$$P = Ctg\left(\frac{\alpha + 2\beta - 20}{2}\right)$$

14. Calcula:

$$H = \left(\frac{Cos^2 45°.Ctg45°.Ctg53°}{Sen30°}\right)$$