Materiales Educativos GRATIS

ALGEBRA TERCERO

RADICACIÓN Y ECUACIÓN EXPONENCIAL

RADICACIÓN EN ℝ

$$\boxed{\sqrt[n]{a}=b} \Rightarrow \boxed{a=b^n}$$

n: índice; $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$

a: cantidad subradical; $a \in \mathbb{R}^{+}_{0}$

b: raíz, $b \in \mathbb{R}$

Además: $\boxed{\sqrt[n]{x^m}=x^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{x}^{m}}$

Ejemplos:

- $\sqrt{9^3}=\sqrt{9}^3=3^3=27$
- $\sqrt[4]{16}=2$ ya que $2^2=16$
- $\sqrt[3]{-8}=-2$ puesto que $(-2)^8=-8$
- $\sqrt{-16}=\nexists$ en $\mathbb{R}$ ***¡Cuidado!***

TEOREMAS

1. $\sqrt[n]{x\cdot y}=\sqrt[n]{x}\cdot\sqrt[n]{y}$ en ℝ

   si n es par entonces $x \geq 0 \wedge y \geq 0$

Ejemplos:

- $\sqrt[3]{x^9\cdot y^6}=\sqrt[3]{x^9}\cdot\sqrt[3]{y^6}=x^{\frac{9}{3}}y^{\frac{6}{3}}=x^3y^2$
- $\sqrt[4]{8}\cdot\sqrt[4]{2}=\sqrt[4]{8\cdot 2}=\sqrt[4]{16}=2$

2. $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}=\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}; b \neq 0$

   Si n es par entonces $a \geq 0; b \geq 0$

Ejemplos:

- $\sqrt[4]{\dfrac{81}{16}}=\dfrac{\sqrt[4]{81}}{\sqrt[4]{16}}=\dfrac{3}{2}$
- $\dfrac{\sqrt[3]{16}}{\sqrt[3]{2}}=\sqrt[3]{\dfrac{16}{2}}=\sqrt[3]{8}=2$

3. $\boxed{\sqrt[m]{\sqrt[n]{\sqrt[p]{x}}}=\sqrt[m\cdot n\cdot p]{x^1}}$

Ejemplos:

- $\sqrt[4]{\sqrt{\sqrt[3]{x^{48}}}}=\sqrt[24]{x^{48}}=x^{\frac{48}{24}}=x^2$

4. Radicales sucesivos

$$\boxed{\sqrt[n]{x\sqrt[m]{y\sqrt[p]{z}}}=\sqrt[n]{x}\cdot\sqrt[n\cdot m]{y}\cdot\sqrt[n\cdot m\cdot p]{z}}$$

Además:

$$\sqrt[n]{x^a\sqrt[m]{x^b\sqrt[p]{x^c}}}=\sqrt[m\cdot n\cdot p]{x^{(am+b)+p+c}}$$

Ejemplos:

- $\sqrt[3]{x^5\cdot\sqrt{x^3}}=\sqrt[3\cdot 2]{x^{5\cdot 2+3}}=\sqrt[6]{x^{13}}$
- $\sqrt[5]{x^3\sqrt{x\sqrt[3]{x^9}}}=\sqrt[5\cdot 2\cdot 3]{x^{(3\cdot 2+1)\cdot 3+9}}=x^{\frac{30}{30}}=x$

ECUACIONES TRASCENDENTALES

Son aquellas donde la incógnita aparece tanto en la base como en el exponente.

Teorema:

$$\boxed{x^x=a^a} \Rightarrow \boxed{x=a}$$

Ejemplo: $x^x=27 \Rightarrow x^x=3^3$

Resuelve: $\therefore x=3$

Cuidado!! $x^x=\left(\dfrac{1}{4}\right)^{\left(\frac{1}{4}\right)} \rightarrow \boxed{x=\dfrac{1}{4}} \vee \boxed{x=\dfrac{1}{2}}$

Trabajando en clase

1. Calcula:

- $M = 4^{\frac{3}{2}} + (-8)^{\frac{5}{3}} + \left(\frac{125}{8}\right)^{\frac{2}{3}}$

- $N = \sqrt[3]{25}\cdot\sqrt[3]{5} - \sqrt{8}\cdot\sqrt{2}$

- $P = \dfrac{\sqrt[5]{64}}{\sqrt[5]{2}} + \dfrac{\sqrt[4]{243}}{\sqrt[4]{3}}$

- $Q = \sqrt[3]{\sqrt{64}} - \sqrt[5]{\sqrt{1024}}$

2. Resuelve:

$$R = \frac{\sqrt[13]{x^{14}}\cdot\sqrt[13]{x^{11}}\cdot\sqrt[13]{x}}{\sqrt[5]{x^{9}}\cdot\sqrt[5]{x^{6}}};x\neq 0$$

3. Reduce:

$$J = \frac{\sqrt[15]{x^{27}}\cdot\sqrt[7]{x^{17}}\cdot\sqrt[11]{x^{17}}}{\sqrt[11]{x^{-5}}\cdot\sqrt[15]{x^{-3}}\cdot\sqrt[7]{x^{3}}};x\neq 0$$

4. Resuelve:

$$\sqrt[x+1]{8} = \sqrt[x+4]{32}$$

Resolución:

Como {8; 32} son potencias de 2, entonces:

$$\sqrt[x+1]{2^3} = \sqrt[x+4]{2^5}$$

$$\Rightarrow 2^{\frac{3}{x+1}} = 2^{\frac{5}{x+4}} \Rightarrow \frac{3}{x+1} = \frac{5}{x+4}$$

$$\Rightarrow 3x + 12 = 5x + 5 \Rightarrow x = \frac{7}{2}$$

5. Resuelve:

$$\sqrt[x+3]{27} = \sqrt[x+5]{81}$$

6. Calcula:

$$N = 25^{-4^{-2^{-1}}} - 4^{-2^{-1^{-5}}} - 2^{-1^{-5^{-4}}} + 1^{-5^{-4^{-2}}}$$

7. Reduce:

$$M = \sqrt{x\sqrt[3]{x\sqrt[4]{x}}}\cdot\sqrt[4]{\sqrt[3]{\sqrt{x^7}}}$$

8. Si: $x = \sqrt[3^3]{27^5\cdot 81^3}$, calcula el valor de: $E = \sqrt[x]{9x^{x+1}}$

Resolución:

Tenemos que encontrar x para determinar lo que nos piden, para eso vemos que {27; 81} son potencias de 3, entonces:

$$x = \sqrt[27]{\left(3^3\right)^5\left(3^4\right)^3} = \sqrt[27]{3^{15}\cdot 3^{12}} = \sqrt[27]{3^{27}}$$

$x = 3$

Reemplazando el valor de "x" en el problema:

$$E = \sqrt[3]{9\cdot 3^{3+1}} = \sqrt[3]{3^2.3^4} = \sqrt[3]{3^6}$$

$$3^2 = 9$$

9. Si: $x = \sqrt[7\cdot 2^2]{16^2\cdot 32^4}$, calcula el valor de: $R = \sqrt[x]{4\cdot x^{x+2}}$

10. Resuelve:

$$\underbrace{\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[3]{2}\cdot\ldots\cdot\sqrt[3]{2}}_{30\text{ veces}} = \underbrace{4\cdot 4\cdot 4\cdot\ldots\cdot 4}_{(x+2)\text{ veces}}$$

11. Si $3^x = 5^y$, calcula $E = \sqrt[x+y]{15^x}$

12. Resuelve: $27^x\cdot x^{3x} = 4$

Resolución:

$$\left(3^3\right)^x\cdot x^{3x} = 2^2$$

$$3^{\boxed{3x}}\cdot x^{\boxed{3x}} = 2^2;\quad \text{Recordar: } \boxed{a^m\cdot b^m = (ab)^m}$$

$$(3x)^{3x} = 2^2$$

$$\Rightarrow 3x = 2$$

$$\therefore x = \frac{2}{3}$$

13. Resuelve:

$$4^x\cdot x^{2x} = 27$$

14. Reduce:

$$M = \frac{\sqrt[x^x]{x^{x^{x+1}}}}{\sqrt[x]{x^{x^2}}}, x\neq 0$$