



PROPORCIONES ARITMÉTICAS Y GEOMÉTRICAS

DEFINICIÓN

Es la igualdad de 2 razones de una misma clase y que tienen el mismo valor de razón.

I. Clases de proporciones

1. Proporción aritmética

Es la igualdad de dos razones aritmética.

Ejemplo:

$$17 - 9 = 20 - 12$$

Donde:

17 y 12 son términos extremos

9 y 20 son términos medios

Se cumple:

$$\left(\begin{array}{c} \text{Suma de términos} \\ \text{extremos} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} \text{Suma de términos} \\ \text{medios} \end{array} \right)$$

2. Proporción geométrica

Es la igualdad de dos razones geométricas.

Ejemplos:

$$\frac{16}{4} = \frac{12}{3}$$

Donde:

16 y 3 son términos extremos

4 y 12 son términos medios

$$\left(\begin{array}{c} \text{Producto de términos} \\ \text{extremos} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} \text{Producto de términos} \\ \text{medios} \end{array} \right)$$

Según sus términos medios, las proporciones serán discretas (términos medios diferentes) o continuas (términos medios iguales).

Proporciones Discreta

Aritmética

$$\boxed{a - b = c - d}$$

d: 4ta diferencial de a; b y c

Ejemplo:
Calcula la cuarta diferencial de 15, 4 y 28

Resolución

Sea "d" la cuarta diferencial

$$\Rightarrow 15 - 4 = 28 - d \\ \therefore d = 17$$

Geométrica

$$\boxed{\frac{a}{b} = \frac{c}{d}}$$

d: 4ta proporcional de a; b y c

Ejemplo:
Calcula la cuarta proporcional de 30; 36 y 20

Resolución

Sea "d" la cuarta proporcional

$$\Rightarrow \frac{30}{36} = \frac{20}{d} \\ \therefore d = 24$$

Proporción Continua

Aritmética

$$\boxed{a - b = b - c}$$

c: 3ra diferencial de "a y b"
b: media diferencial de "a y c"

Ejemplo
Calcula la tercera diferencial de 18 y 15.

Geométrica

$$\boxed{\frac{a}{b} = \frac{b}{c}}$$

c: 3ra proporcional de "a y b"
b: media proporcional de "a; b y c"

Ejemplo:
Calcula la tercera proporcional de 9 y 6.

Propiedades

$$\text{Si } \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d} \\ \frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d} \\ \frac{a}{b+a} = \frac{c}{d+c} \\ \frac{a}{b-a} = \frac{c}{d-c} \end{array} \right| \left. \begin{array}{l} \frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d} \\ \frac{a-b}{a+b} = \frac{c-d}{c+d} \\ \frac{a+c}{b+d} = \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \\ \frac{a-c}{b-a} = \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \end{array} \right.$$

3. Razones geométricas equivalentes

Es la igualdad de más de 2 razones geométricas que tienen el mismo valor.

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \dots = \frac{a_n}{b_n} = k$$

Propiedades

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{b_1 + b_2 + \dots + b_n} = k$$

$$\frac{a_1 \times a_2 \times \dots \times a_n}{b_1 \times b_2 \times \dots \times b_n} = k$$

$$\left(\frac{a_1}{b_1}\right)^m = \left(\frac{a_2}{b_2}\right)^m = \dots = \left(\frac{a_n}{b_n}\right)^m = k^m$$

TRABAJANDO EN CLASE

Integral

1. Calcula la suma de la tercera diferencial de 24 y 18, con la cuarta proporcional de 18; 6 y 81.

2. Calcula $M = E + T + A$

Si "E" es la media proporcional de 3 y 27, "T" es la tercera diferencial de 50 y 27 y "A" es la media diferencial de 28 y 12,

3. En una proporción geométrica continua, los términos extremos están en la relación de 16 a 25. Si la suma de los términos diferentes es 366, calcula la media proporcional.

PUCP

4. Si

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{c} \quad a = 9c; \quad a + b = 36$$

Calcula c

Resolución

Sea $\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$ una proporción geométrica continua.

Donde:

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = k \\ \rightarrow \frac{ck^2}{ck} = \frac{ck}{c} = k$$

Del dato:

$$a = 9c \\ \cancel{k}^2 = 9\cancel{c} \\ \boxed{k = 3}$$

Entonces:

$$\frac{9c}{3c} = \frac{3c}{c} \\ \Rightarrow a + b = 36 \\ 9c + 3c = 36 \\ 12c = 36 \\ \boxed{c = 3} \quad \therefore c = 3$$

5. Calcula: C

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{c}; \quad a = 25c \\ a + c = 78$$

6. Si la suma de los 4 términos de una proporción aritmética continua es 60, ¿cuál es la media diferencial?

7. Calcula: $c - a$

$$\frac{a}{3} = \frac{b}{4} = \frac{c}{7}; \quad y \quad a + b + c = 70$$

UNMSM

8. Si el producto de los 4 términos de una proporción geométrica continua es 625, determina la media proporcional.

Resolución:

Sea:

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = k$$

También:

$$\frac{ck^2}{ck} = \frac{ck}{c} = k$$

Del dato:

$$ck^2 \cdot ck \cdot ck \cdot c = 625 \\ c^4 \cdot k^4 = 625 \\ ck = 5$$

→ La media proporcional es $b = ck$

$$\therefore b = 5$$

9. Si el producto de los 4 términos de una proporción geométrica continua es 256, determina la media proporcional.

10. Si la razón de una proporción geométrica continua es 4 y los términos extremos suman 85, determina la media proporcional.

11. Si en una proporción aritmética continua la suma de sus términos es 60, determina la suma de sus términos extremos.

UNI

12. Determina:

$$\frac{a^2 + b^2 + c^2}{ab + bc + cd}$$

Si;

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{d}; \frac{ab + bc + cd}{b^2 + c^2 + d^2} = 5$$

Resolución

Sea:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{c} = \frac{b}{c} \cdot \frac{c}{d} = \frac{c}{d} \cdot \frac{d}{d} = k$$

$$\frac{ab}{b^2} = \frac{bc}{c^2} = \frac{cd}{d^2} = k = 5$$

Entonces:

$$\frac{a}{b} \cdot a = \frac{b}{c} \cdot b = \frac{c}{d} \cdot c = k$$

$$\frac{a^2}{ab} = \frac{b^2}{cb} = \frac{c^2}{cd} = k$$

$$\frac{a^2 + b^2 + c^2}{ab + cb + cd} = k = 5$$

$$\therefore \frac{a^2 + b^2 + c^2}{ab + cb + cd} = 5$$

13. Calcula:

$$\frac{a + b + c}{b + c + d}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{d} = k$$

$$\frac{a^2b + b^2c + c^2d}{b^3 + c^3 + d^3} = 9$$

14. Calcula:

$$M = \frac{a}{d}$$

$$\text{Si: } \frac{a^2 + b^2 + c^2}{b^2 + c^2 + d^2} = 4;$$

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{d} = 2$$