PROPIEDADES DE LOS LOGARITMOS

PROPIEDADES FUNDAMENTALES

$$\boxed{b^{\log_b x} = x} \qquad \boxed{\log_b b^y = y}$$

PROPIEDADES

1. $\log_b b = 1,\ \log_b 1 = 0$
2. $\log_b(M.N) = \log_b M + \log_b N$
3. $\log_b\left(\dfrac{M}{N}\right) = \log_b M - \log_b N$
4. $\log_b M^n = n\log_b M$
5. $\log_b \sqrt[n]{M} = \dfrac{1}{n}\log_b M$
6. $\log_{b^n} M = \dfrac{1}{n}\log_b M$
7. $\log_{\sqrt[n]{b}} M = n\log_b M$
8. $\log_{b^n} b^m = \dfrac{m}{n}$
9. $\log_{\sqrt[n]{b}} \sqrt[n]{M} = \log_{b^n} M^n = \log_b M$

CAMBIO DE BASE

$$\boxed{\log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b}}$$

De la fórmula del cambio de base se puede deducir que:

$$\boxed{\log_b a = \frac{1}{\log_a b}}$$

REGLA DE LA CADENA

$$\boxed{\log_d c.\log_c b.\log_b a = \log_d a}$$

SISTEMA DE LOGARITMOS

Es el conjunto de valores de un logaritmo calculados en una determinada base. Los sistemas más utilizados son:

1. Logaritmo decimal

Es aquel logaritmo cuya base es 10, su notación está dada por:

$$\boxed{\log_{10} x = \log x}$$

2. Logaritmo neperiano

También llamado logaritmo natural o hiperbólico, es aquel cuya base es el llamado número de Neper «e» cuyo valor es 2,718281..., cuya notación es:

$$\boxed{\log_e x = \ln x = Lx}$$

Trabajando en clase

Integral

1. Al calcular el logaritmo de $7^8.\sqrt[5]{7}$ en la base $7^5.\sqrt[8]{7}$, se obtiene:

2. Para a > 1, si: $\log_a 5 = m$, $\log_a 7 = n$.
Hallar: $S = \log_a(175a)$.

3. Calcular:
$$\frac{1}{1+\log_3(10e)} + \frac{1}{1+\ln 30} + \frac{1}{1+\log(3e)}$$

PUCP

4. Calcula:
$$P = \log\left(\frac{75}{16}\right) - 2\log\left(\frac{5}{9}\right) + \log\left(\frac{32}{243}\right)$$
Indique 10^P.

Resolución:
Transformando la expresión a logaritmo de un producto y un cociente, tendremos:

$$P = \text{Log}\frac{75}{16} + \text{Log}\frac{32}{243} - \text{Log}\left(\frac{5}{9}\right)^2 = \text{Log}\frac{75}{16}.\text{Log}\frac{32}{243} - \text{Log}\frac{25}{81}$$

$$= \text{Log}\frac{81.75.32}{25.16.243} = \text{Log}2$$

Entonces $10^P = 2$.

5. Reducir:

$$G = \text{Log}_2\left(\frac{8}{3}\right) + \text{Log}_4\left(\frac{81}{2}\right) + \text{Log}_4\left(\frac{16}{5}\right) + \text{Log}_{16}\left(\frac{25}{162}\right)$$

6. A partir de: $10^{\text{Log}(\text{Log}_b a)} = 12$. Expresar el valor de:

$$\frac{\text{Log}_b\sqrt{ab}}{\text{Log}_a\sqrt{\dfrac{a}{b}}}$$

7. Calcular: $3^{\text{Log}_4 5^{\text{Log}_3 4}}$

UNMSM

8. Hallar el valor:

$$M = \text{Log}_8 16 + \text{Log}_{343\sqrt{7}}49 + \text{Log}_3(27.\sqrt[3]{3})$$

Resolución:

$$\text{Log}_8 16 = \text{Log}_{2^3}2^4 = \frac{4}{3}\text{Log}_2 2 = \frac{4}{3}$$

$$\text{Log}_{343\sqrt{7}}49 = \text{Log}_{7^3.7^{1/2}}7^2 = \text{Log}_{7^{7/2}}7^2 = \frac{2}{\frac{7}{2}} = \frac{4}{7}$$

$$\text{Log}_3 27\sqrt[3]{3} = \text{Log}_3 3^3.3^{1/3} = \text{Log}_3 3^{10/3} = \frac{10}{3}$$

Finalmente se pide:

$$M = \frac{4}{3} + \frac{4}{7} + \frac{10}{3} = \frac{110}{21}$$

$$\therefore\ m = \frac{110}{21}$$

9. Calcular:

$$\text{Log}_{\sqrt[5]{4}}\sqrt[3]{2} + \text{Log}_{2.\sqrt[5]{2}}\sqrt[5]{2} + \text{Log}_{\sqrt[6]{4}}4\sqrt[3]{2}$$

10. Sabiendo que: $a^2 + b^2 = 7ab$. Reducir:

$$\frac{\text{Log}_c a + \text{Log}_c b}{\text{Log}_c\left[\frac{1}{3}(a+b)\right]}$$

11. Si a y b son las raíces de la ecuación: $x^2 - 6x + 2 = 0$. Hallar:

$$\text{Log}_{42}\left(\frac{9a}{7}\right) + \text{Log}_{42}\left(\frac{49b}{3}\right)$$

UNI

12. Calcular:

$$M = \text{Log}_4(\text{Log}_{\sqrt{2}}(\text{Log}_{1/2}(\text{Log}_2\sqrt[4]{2})))$$

Resolución:

Reducimos de adentro hacia afuera:

$$M = \text{Log}_4(\text{Log}_{\sqrt{2}}(\text{Log}_{1/2}(\text{Log}_2 2^{1/4})))$$

$$M = \text{Log}_4\left(\text{Log}_{\sqrt{2}}\left(\text{Log}_{1/2}\left(\frac{1}{4}\right)\right)\right)$$

$$M = \text{Log}_4(\text{Log}_{\sqrt{2}}(2)) = \text{Log}_4(\text{Log}_{\sqrt{2}}(\sqrt{2}^2))$$

$$M = \text{Log}_4(2) = \text{Log}_4(4^{1/2}) = \frac{1}{2}$$

13. Calcular: $M = \log_{16}(\log_{\sqrt[4]{2}}(\log_{1/3}(\log_3\sqrt[9]{3})))$

14. Reducir:

$$M = \sqrt[3]{25^{\text{Log}_5 3} + 81^{\text{Log}_3 2} + \sqrt[3]{2}^{\text{Log}_4 64}}$$