PRODUCTOS NOTABLES

Son resultados de ciertas multiplicaciones algebraicas que se obtienen de forma directa, sin la necesidad de aplicar los axiomas de la distribución.

BINOMIO AL CUADRADO

$$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$$
$$(a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$$

Ejemplos:

- $(x+5)^2 = x^2 + 5^2 + 2(x)(5) = x^2 + 25 + 10x$
- $(m-7)^2 = m^2 + 7^2 - 2(m)(7) = m^2 + 49 - 14m$
- $(2x^2+3)^2 = (2x^2)^2 + 3^2 + 2(2x^2)(3) = 4x^4 + 9 + 12x^2$
- $\left(\sqrt{7}-\sqrt{2}\right)^2 = \sqrt{7}^2 + \sqrt{2}^2 - 2\sqrt{7}\sqrt{2} = 9 - 2\sqrt{14}$

Nota:

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2 = x^2 + \frac{1}{x^2} + 2x.\frac{1}{x} = x^2 + \frac{1}{x^2} + 2$$
$$\left(x-\frac{1}{x}\right)^2 = x^2 + \frac{1}{x^2} - 2x.\frac{1}{x} = x^2 + \frac{1}{x^2} - 2$$

IDENTIDAD DE LEGENDRE

$$(a+b)^2 + (a-b)^3 = 2(a^2+b^2)$$
$$(a+b)^2 - (a-b)^2 = 4ab$$

Ejemplos:

- $(x+3)^2 + (x-3)^2 = 2(x^2+3^2)$
- $(m+3n)^2 - (m-3n)^2 = 4(m)(3n)$

Nota:

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2 + \left(x-\frac{1}{x}\right)^2 = 2\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)$$
$$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2 - \left(x-\frac{1}{x}\right)^2 = 4.x.\frac{1}{x} = 4$$

DIFERENCIA DE CUADRADOS

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

Ejemplos:

- $(x+6)(x-6) = x^2 - 6^2 = x^2 - 36$
- $\left(\sqrt{5}+\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{5}-\sqrt{2}\right) = \sqrt{5}^2 - \sqrt{2}^2 = 5 - 2 = 3$
- $(n^2+1)(n^2-1) = (n^2)^2 - 1^2 = n^4 - 1$
- $(n^4+1)(n^4-1) = (n^4)^2 - 1^2 = n^8 - 1$

BINOMIO AL CUBO

$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

Forma reducida: $(a+b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b)$

$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

Forma reducida: $(a+b)^3 = a^3 - b^3 - 3ab(a-b)$

Ejemplos:

- $(x+1)^3 = x^3 + 1^3 + 3(x)(1)(x+1)$
- $(x-1)^3 = x^3 - 1^3 - 3(x)(1)(x-1)$
- $(3m-2)^3 = (3m)^3 - (2)^3 - 3(3m)(2)(3m-2)$

Nota:

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)^3 = x^3 + \frac{1}{x^3} + 3x.\frac{1}{x}\left(x+\frac{1}{x}\right) = x^3 + \frac{1}{x^3} + 3\left(x+\frac{1}{x}\right)$$
$$\left(x-\frac{1}{x}\right)^3 = x^3 - \frac{1}{x^3} - 3x.\frac{1}{x}\left(x-\frac{1}{x}\right) = x^3 - \frac{1}{x^3} - 3\left(x-\frac{1}{x}\right)$$

SUMA Y DIFERENCIA DE CUBOS

$(a + b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3$
$(a - b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3$

Ejemplos:

- $(x + 2)\ (x^2 - 2x + 4) = x^3 + 2^3 = x^3 + 8$
- $(x - 3)\ (x^2 + 3x + 9) = x^3 - 3^3 = x^3 - 27$
- $(3m + 1)\ (9m^2 - 3m + 1) = (3m)^3 + 1^3 = 27m^3 + 1$
- $\left(\sqrt[3]{7} - \sqrt[3]{2}\right)\left(\sqrt[3]{49} + \sqrt[3]{14} + \sqrt[3]{4}\right) = \sqrt{7}^3 - \sqrt{2}^3 = 7 - 2 = 5$

IDENTIDADES DE STEVIN

$(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$

Ejemplo:

- $(x + 6)\ (x - 9) = x^2 + (6 - 9)x + (6)\ (-9) = x^2 - 3x - 54$
- $(x - 3)\ (x - 1) = x^2 + (-3 - 1)x + (-3)\ (-1) = x^2 - 4x + 3$

IDENTIDADES ADICIONALES

$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ac)$
$(a + b + c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3(a + b)(b + c)(a + c)$
$(x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1) = x^4 + x^2 + 1$
$(x^2 + xy + y^2)(x^2 - xy + y^2) = x^4 + x^2y^2 + y^4$

Ejemplo:

$A = (x + 2)(x - 2)(x^2 - 2x + 4)(x^2 + 2x + 4) + 64$

$A = (x^2 - 4)(x^4 + 4x^2 + 16) + 64$

$A = (x^2)^3 - 4^3 + 64 = x^6$

IDENTIDADES CONDICIONALES

Si $a + b + c = 0$

- $a^2 + b^2 + c^2 = -2(ab + bc + ac)$
- $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$

Ejemplo:

Si $a + b + c = 0$, calcula el valor de:

$$M = \frac{a^3 + b^3 + c^3}{abc} + \frac{a^2 + b^2 + c^2}{ab + bc + ac} = 3 - 2 = 1$$

Trabajando en clase

Integral

1. Si $x + y = 10$; $xy = 5$, calcula $x^2 + y^2$

2. Si $x - y = 4$; $xy = 1$, calcula $x^3 + y^3$

3. Si $x + y = 6$; $x^2 + y^2 = 15$
Calcula $x - y$, si $x > y$

PUCP

4. Si $x + \frac{1}{x} = 4$, calcula $x^2 + \frac{1}{x^2} + x^3 + \frac{1}{x^3}$

Resolución:

Sabemos que:

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = x^2 + \frac{1}{x^2} + 2x.\frac{1}{x}$$

$$\rightarrow 4^2 = x^2 + \frac{1}{x^2} + 2$$

$$\rightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} = 14$$

También:

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^3 = x^3 + \frac{1}{x^3} + 3x.\frac{1}{x}\left(x + \frac{1}{x}\right)$$

$$\rightarrow 4^3 = x^3 + \frac{1}{x^3} + 3(4)$$

$$\rightarrow x^3 + \frac{1}{x^3} = 52$$

$$\therefore x^2 + \frac{1}{x^2} + x^3 + \frac{1}{x^3} = 14 + 52 = 66$$

5. Si $x - \frac{1}{x} = 3$, calcula $x^2 + \frac{1}{x^2} + x^3 - \frac{1}{x^3}$

6. Si $a = \sqrt{\sqrt{3} - 1}$, calcula:

$$E = \left(\frac{a}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{a}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2$$

(CEPREPUC)

7. Si:
$M = (3b - 2a)(9b^2 + 6ab + 4a^2)$
$N = (2a\sqrt{2a} - 3b)(2a\sqrt{2a} + 3b)$

Calcula: $\dfrac{M + N}{9b^3 - 3b^2}$

(CEPREPUC)

UNMSM

8. Si: $\frac{2}{a} + \frac{1}{b} = \frac{8}{a + 2b}$, a y b números no núlos.

Calcula $E = \sqrt{\dfrac{a^6 + 17b^6}{a^6 - 52b^6}}$

(UNMSM 2002)

Resolución:

Por dato:

$$\frac{2}{a} + \frac{1}{b} = \frac{8}{a + 2b} \rightarrow \frac{a + 2b}{a.b} = \frac{8}{a + 2b}$$

$\rightarrow (a + 2b)^2 = 8ab \rightarrow a^2 + 4ab + 4b^2 = 8ab$

$\rightarrow a^2 - 4ab + 4b^2 = 0$

$\rightarrow (a - 2b)2 = 0 \rightarrow a - 2b = 0 \rightarrow a = 2b$

Entonces: $a^6 = (2b)^6 = 64b^6$

Reemplazando:

$$E = \sqrt{\frac{a^6 + 17b^6}{a^6 - 52b^6}} = \sqrt{\frac{64b^6 + 17b^6}{64b^6 - 52b^6}} = \sqrt{\frac{81b^6}{12b^6}}$$

$$= \sqrt{\frac{27}{4}}$$

9. Si $\frac{1}{a} + \frac{1}{3b} = \frac{4}{a + 3b}$, a y b números no nulos.

($a \neq b$)

Calcula $E = \dfrac{a^2 + ab + b^2}{a^2 - b^2}$

10. Si $x^2 + 5x - 3 = 0$, calcula el valor de:
$U = (x + 1)(x + 2)(x + 3)(x + 4)$

11. Suponiendo que $a + b + c = 0$ y a, b y c no nulo, calcula:

$$E = \frac{a^2}{bc} + \frac{b^2}{ac} + \frac{c^2}{ab}$$

(UNMSM 2004 – II)

UNI

12. Si se sabe que: $\dfrac{a}{x^9}+\dfrac{x^9}{a}=7$, ¿cuál es el valor de la expresión $\sqrt[4]{\dfrac{a}{x^9}}+\sqrt[4]{\dfrac{x^9}{a}}$?

(UNI 1981)

Resolución:

Sea: $M=\sqrt[4]{\dfrac{a}{x^9}}+\sqrt[4]{\dfrac{x^9}{a}}$

$$M^2=\sqrt[\cancel{4}]{\frac{a}{x^9}}^{\cancel{2}}+2\sqrt[\cancel{4}]{\frac{\cancel{a}}{\cancel{x^9}}}\sqrt[\cancel{4}]{\frac{\cancel{x^9}}{a}}+\sqrt[\cancel{4}]{\frac{x^9}{a}}^{\cancel{2}}$$

$$M^2=\sqrt{\frac{a}{x^9}}+2+\sqrt{\frac{x^9}{a}}$$

$$\left(M^2-2\right)^2=\left(\sqrt{\frac{a}{x^9}}+\sqrt{\frac{x^9}{a}}\right)^2$$

$$\left(M^2-2\right)^2=\frac{a}{x^9}+2+\frac{x^9}{a}$$

$(M^2-2)^2 = 7+2$

$M^2-2=3 \rightarrow M=\sqrt{5}$

13. Si se sabe que: $\dfrac{y}{x^3}+\dfrac{x^3}{y}=14$, ¿cuál es el valor de la expresión $\sqrt[4]{\dfrac{y}{x^3}}+\sqrt[4]{\dfrac{x^3}{y}}$

14. Halle el valor numérico de

$P=\left(\dfrac{n^{-3}+m^{-3}}{m^{-3}.n^{-3}}\right)^{-1}$ si ; $m+n=\sqrt[3]{12}$;

$mn=2\sqrt[3]{18}$

(UNI 2008 – I)