PROBLEMAS DE DESIGUALDADES

DEFINICIÓN

Una desigualdad expresa que una cantidad real o una expresión es mayor o menor que otra.

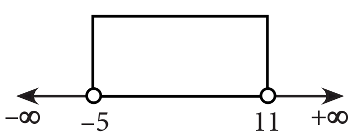
A continuación se indica el significado de los signos de desigualdad.

1. $a > b$ significa que «a» es mayor que «b» (o bien, que «$a - b$» es un número positivo).
2. $a < b$ significa que «a» es menor que «b» (o bien, que «$a - b$» es un número negativo).
3. $a \geq b$ significa que «a es mayor o igual a b».
4. $a \leq b$ significa que «a es menor o igual a b».
5. $0 < a < 2$ significa que «a es mayor que cero, menor que 2».
6. $-2 \leq x < 2$ significa que «x es mayor o igual que -2, pero menor que 2».

Las desigualdades $a > b$ y $c > d$ son del mismo sentido.
Las desigualdades $a > b$ y $e < f$ son de sentido contrario.

Intervalos abiertos

$$-5 < x < 11$$

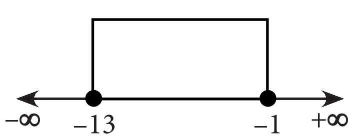


$$x \in \langle -5; 11\rangle = \,]-5; 11[$$

Menor valor entero = -4
Mayor valor entero = 10

Intervalos cerrados

$$-13 \leq x \leq -1$$

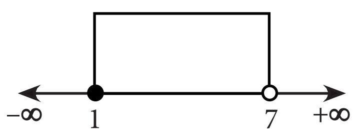


$$x \in [-13; -1]$$

Menor valor entero = -13
Mayor valor entero = -1

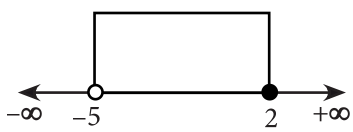
Intervalos semiabieros o semicerrados

a) $1 \leq x < 7$



$x \in [1; 7[$ o $x \in [1; 7\rangle$

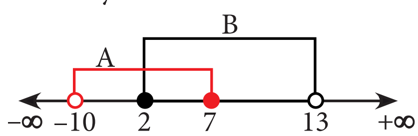
b) $-5 < x \leq 2$



$x \in \,]-5; 2]$ o $x \in \langle -5; 2]$

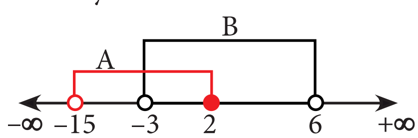
Operaciones con intervalos intersección y unión

Sean $A = \langle -10; 7]$; $B = [2; 13\rangle$
Hallamos $A \cap B$ y $A \cup B$



$A \cap B = [2; 7]$
$A \cup B = \langle -10; 13\rangle$

Diferencia:
Sean $\langle -15; 2]$, $B = \langle -3; 6\rangle$
Hallamos $A - B$ y $B - A$



$A - B = \langle -15; -3]$
$B - A = \langle 2; 6\rangle$

PROPIEDADES DE LAS DESIGUALDADES

1. El sentido de una desigualdad no cambia si se suma o se resta un número real a sus dos miembros.
   Ejemplo: $a < b \wedge c \in \mathbb{R}$, entonces
   $a + c < b + c$
   $a - c < b - c$

Ejemplos numéricos:
Entonces:
❖ $-5 + 3 < -1 + 3$
$-2 < 2$ (no cambia)
❖ $-5 - 3 < -1 - 3$
$-8 < -4$ (no cambia)

2. El sentido de una desigualdad no cambia si se multiplica o se divide por un mismo número positivo sus dos miembros.
Si $a < b \wedge c > 0$, entonces:
$a.c < b.c$
$a/c < b/c$

Ejemplos numéricos:
Si $-10 < 15$; $c = 5 > 0$
Entonces:
❖ $-10(5) < 15(5)$
$-50 < 75$(no cambia)
❖ $-\frac{10}{5} < \frac{15}{5}$
$-2 < 3$ (no cambia)

3. El sentido de una desigualdad cambia cuando se multiplica o se divide por un mismo número negativo sus miembros.
Si $a < b \wedge c < 0$,

Entonces:
$a.c > b.c$
$a/c > b/c$
Ejemplos numéricos:
❖ $18 < 24 \wedge c = -6 < 0$
Entonces:
$18(-6) > 24(-6)$
$-108 > -144$ (cambia)
❖ $\frac{18}{-6} > \frac{24}{-6}$
$-3 > -4$ (cambia)

4. Si $0 < a < b \Rightarrow \frac{1}{a} > \frac{1}{b}$

Si y solo si «a» y «b» tengan el mismo signo (ambos positivos o ambos negativos).
Ejemplos numéricos:
❖ Si $5 < 10$, entonces:
$\frac{1}{5} > \frac{1}{10}$ (cambia)
❖ Si $-4 < -2$, entonces:
$-\frac{1}{4} > -\frac{1}{2}$ (cambia)

5. Al elevar al cuadrado, debemos tener en cuenta:
❖ Si $a < x < b$ con $a; b > 0$
Entonces:
$a^2 < x^2 < b^2$ (no cambia)
❖ Si $a < x < b$ con $a, b < 0$
Entonces:
$b^2 < x^2 < a^2$ (cambia)
❖ Si $a < x < b$ con $a < 0 \wedge b > 0$
Entonces: $0 \le x^2 <$ max. de $\{a^2, b^2\}$

Trabajando en clase

Integral

1. Si $x \in \langle -2; 5]$, indica la cantidad de valores enteros que puede tomar «x».

2. Si $A \in \langle -5; 10]$ y $B \in \langle -3; 15]$ determina:
$A \cup B$; $A \cap B$; $A - B$

3. Si $M \in [-8; 12]$ y $N = [-3; 2\rangle$ determina:
$M \cup N$; $M \cap B$; $M - N$

UPCP

4. Si $x \in \langle -3; 5]$ a qué intervalo pertenece: $A = 2x + 1$.
Resolución:
Si $-3 < x \le 5$ por (2)
$-6 < 2x \le 10$ sumamos 1
$-5 < 2x + 1 \le 11$
Entonces $2x + 1$ pertenece al intervalo $\langle -5; 11]$

5. Si $x \in [-2; 7\rangle$, a qué intervalo pertenece:
$B = 3x + 2$

6. Si $x \in \langle -6; -3\rangle$, a qué intervalo pertenece:
$P = -3x + 5$

7. Si $A = [-8; -3\rangle$ y $B = [-5; 10\rangle$, determina la suma de valores enteros de $A \cap B$.

UNMSM

8. Si $x \in \langle 2; 5]$, a qué intervalo pertenece:
$M = x^2 + 1$
Resolución:
Si $2 < x \le 5$ elevamos al cuadrado
$4 < x^2 \le 25$ sumamos 1
$5 < x^2 + 1 \le 26$
Entonces $x^2 + 1$ pertenece al intervalo $\langle 5; 26]$

9. Si x ∈ ⟨–5; 3], a qué intervalo pertenece:

$$Q = -3x^2 + 3$$

10. Si x ∈ ⟨–8; –3], a qué intervalo pertenece:

$$R = 2x^2 + 10$$

11. Si x ∈ ⟨–2; 4], a qué intervalo pertenece:

$$F = 3x^2 - 5$$

UNI

12. Si x ∈ ⟨4; 10], a qué intervalo pertenece:

$$P = \frac{12}{x+5}$$

Resolución:

Si: $4 < x \leq 10$

$$9 < x + 5 \leq 15$$

$$\frac{1}{15} < \frac{1}{x+5} \leq \frac{1}{9}$$

$$\frac{12}{15} < \frac{12}{x+5} \leq \frac{12}{9}$$

Entonces: $\frac{12}{x+5} \in \left\langle \frac{3}{5}; \frac{4}{3} \right]$

13. Si x ∈ ⟨–5; –2], a qué intervalo pertenece:

$$R = \frac{3}{x-1}$$

14. Si x ∈ ⟨6; 12], a qué intervalo pertenece:

$$F = \frac{2}{3}x - 4$$