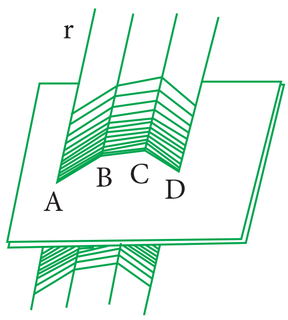
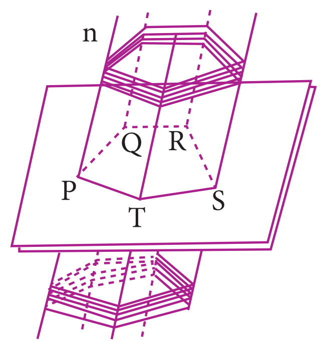
PRISMA Y TRONCO DE PRISMA

Superficie prismática

Se llama superficie prismática, a aquella que genera una recta (generatriz), al deslizarse paralelamente a su posición inicial, a lo largo de una poligonal o polígono (directriz).
Si la directriz es una poligonal, la superficie prismática es abierta. Si es un polígono, la superficie es cerrada.



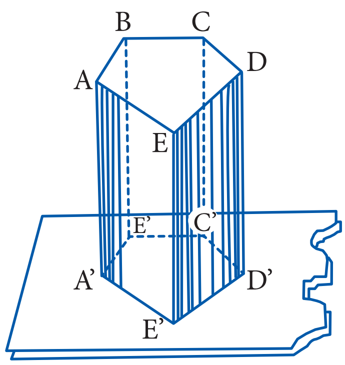
Superficie prismática abierta
$\overline{r}$: generatriz
ABCD: directriz



Superficie prismática cerrada
$\overline{n}$: generatriz
PQRST: directriz

Prisma

Un prisma, es el poliedro determinado al interceptar una superficie prismática cerrada, mediante dos planos paralelos entre sí.
La figura adjunta muestra un prisma.
Las regiones poligonales ABCDE y A'B'C'D'E' son paralelas y corresponden a los polígonos congruentes. Estas dos caras son las «bases» del prisma y la distancia entre ellas es la altura del sólido. Las demás caras son regiones paralelográmicas, llamadas «caras laterales»; sus intersecciones se llaman «aristas paralelas». Todas las aristas laterales son paralelas y congruentes.



Clasificación de los primas

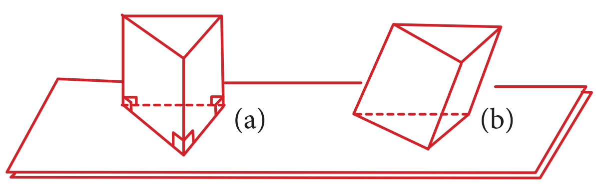
Se clasifican en: recto, oblicuo y regular

a) Prisma recto

Es aquel cuyas aristas laterales son perpendiculares a las bases. Las caras laterales son regiones rectangulares, y las aristas laterales son congruentes a la altura.

b) Prisma oblicuo

Tiene sus aristas laterales oblicuas a las bases.
Según sus bases sean regionales triangulares, cuadrangulares, pentagonales, etc, los primas se llaman triangulares, cuadrangulares, pentagonales, etc. Por ejemplo, la figura (a) muestra un prisma recto triangular.



c) Prisma regular

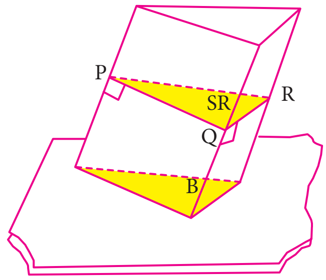
Aquel prisma recto, cuyas bases corresponden a polígonos regulares. (En cualquier otro caso, el prisma no es regular)

Secciones de un prisma

- Una «sección» de un prisma, es la región determinada por la intersección del prisma con un plano.
- Una «sección transversal» de un prisma, es la sección del prisma con un plano paralelo a la base.
- Una «sección recta» de un prisma, es la sección del prisma con un plano perpendicular a las aristas laterales. Por ejemplo, la sección PQR, en la siguiente figura.

Nota

Si B y SR, son las áreas de la base del prisma y de la sección recta, respectivamente; entonces: $\boxed{SR = B\cos\beta}$ donde β, es la medida del ángulo diedro que forman los planos que contienen a la base del prisma y a la sección recta.



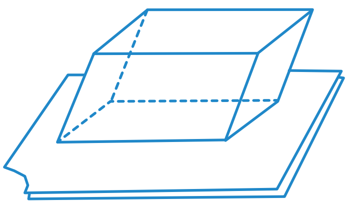
Paralelepípedo

Aquel prisma cuyas bases son regiones paralelográmicas.

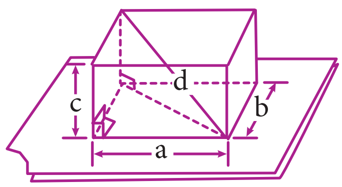
Clasificación de paralelepípedos

Se clasifican en

a) Paralelepípedo recto: sus aristas laterales son perpendiculares a las bases. Las caras laterales son regiones rectangulares.
b) Paralelepípedo: tiene sus aristas laterales oblicuas a las bases. Las seis caras son regiones paralelográmicas.
c) Paralelepípedo rectangular: aquel paralelepípedo recto cuyas bases son regiones rectangulares. Llamado también rectoedro.
d) Cubo: es un paralelepípedo rectangular que tiene todas sus aristas congruentes.
e) Romboedro: aquel paralelepípedo que tiene por bases regiones romboédricas.



Paralelepípedo oblicuo



Paralelepípedo rectangular (rectoedro)

d: longitud de la diagonal

$\boxed{d^2 = a^2 + b^2 + c^2}$

Fórmulas

I. Superficie lateral y total de un prisma

La superficie lateral de un prisma es la suma de las superficies de todas sus caras laterales. La superficie total del prisma es la suma de superficie material y de las dos bases. A dichas superficies se refieren las áreas lateral y total.

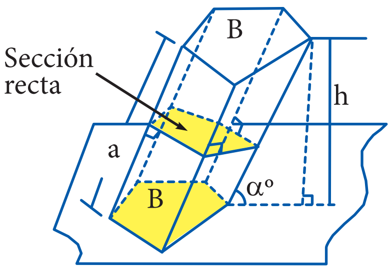
Teorema

El área lateral de un prisma oblicuo es el producto del perímetro de una sección recta por la longitud de una arista lateral.

Así, para el prisma de la figura:

a $\rightarrow$ longitud de la arista lateral

P $\rightarrow$ perímetro de la sección recta



El área lateral: $\boxed{S_L = pa}$

Área total
Si B, es el área de cada base, el área total será:

$$\boxed{S_T = S_L + 2B}$$

II. Volumen de un prisma

El volumen de un prisma es el producto del área de una base por su altura.
Si h, es longitud de la altura del prisma:

$$\boxed{V = B \cdot h}$$

También, el volumen de un prisma, es el producto del área de una sección recta por una arista lateral. Así, llamado SR, el área de una sección recta:

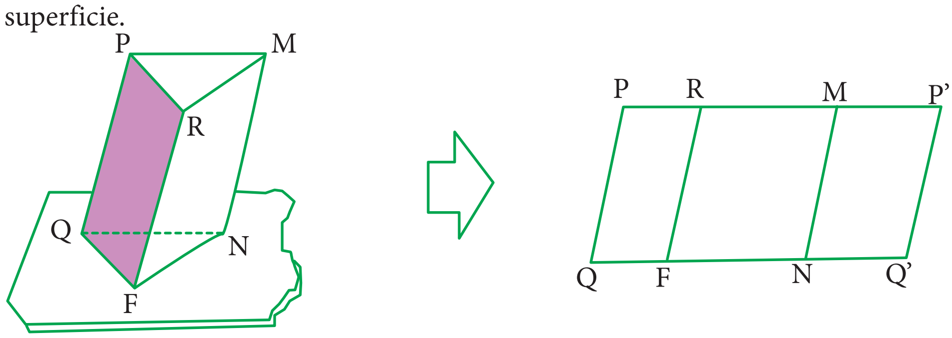
$$\boxed{V = (SR) \cdot a}$$

Observaciones
En la figura anterior, α°, es la medida del ángulo que forman las aristas laterales con las bases.

- Es evidente que, en un prisma oblicuo, $\alpha < 90$ y $h < a$. Además, el área de la sección recta, es menor que el área de la base: $SR < B$.
- En un prisma recto: $\alpha = 90$; $h = a$ y $SR = B$.
- De lo anterior, se deduce que, el área lateral de un prisma recto, es el producto del perímetro de una base por una arista lateral. Asimismo, el volumen es igual a producto del área de una base por la arista lateral.
- Si a, b y c, son longitudinales de tres aristas concurrentes de un paralelepípedo rectangular, entonces su volumen será:

$$\boxed{V = a \cdot b \cdot c}$$

- Si se extiende (se desarrolla) la superficie lateral de un prisma, a partir de una arista lateral, (por ejemplo: $\overline{PQ}$), de modo que todas las caras laterales queden coplanarias, se dice que se ha desarrollado dicha superficie.



Tronco de primas

Se obtiene al interceptar la superficie lateral de un prisma, con plano no paralelo a las bases.
Las caras laterales son trapecios.

- El volumen es igual al producto del área de una sección recta y la longitud del segmento que une los centros de gravedad de las bases del tronco ($\overline{CG'}$).
(Las secciones rectas del tronco son las mismas que el prisma original).
- Existen fórmulas sencillas para evaluar el volumen de un tronco de prisma de base triangular. Así, para el tronco de la figura 2; el volumen V, se evalúa:

$$\boxed{V = (\text{área AEC}) \cdot \left(\frac{h_1 + h_2 + h_3}{3}\right)}$$

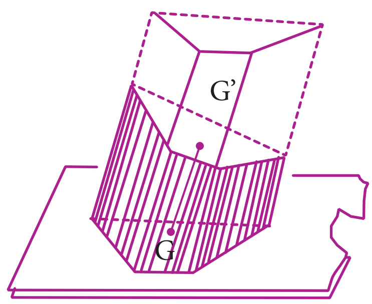


Fig. 1

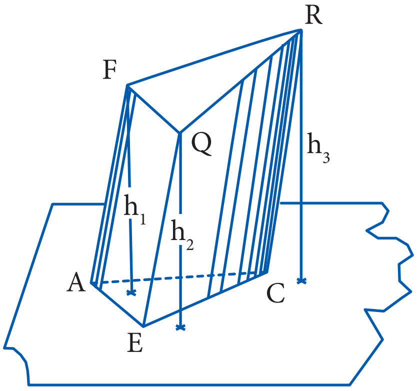


Fig. 2

También, para la misma figura 2:

$$V = (\text{área de una sección recta}) \cdot \left(\frac{AF + EQ + CR}{3}\right)$$

- Si el tronco de prisma es recto (originado de un prisma recto), y de base triangular, las caras laterales resultan trapecio rectángulos. (fig. 3).
  En este caso:

$$V = B \cdot \left(\frac{a + b + c}{3}\right)$$

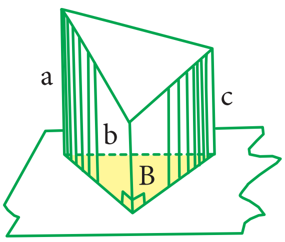


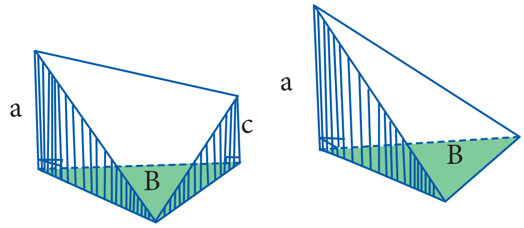
Fig. 3

a, b, c: longitudes de las aristas laterales
B: área de la base del prisma recto original.

- También, se pueden presentar gráficos como en la figura 4; donde B es el área de la base, del tronco de prisma recto.

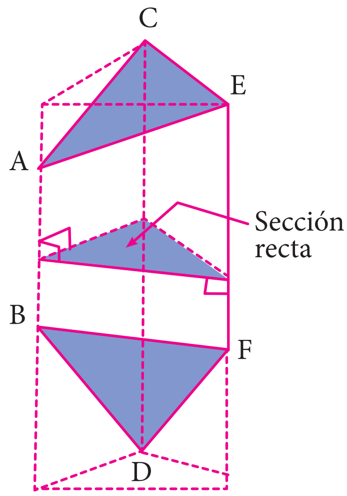
$$V = B\left(\frac{a + c}{3}\right) \qquad V = B \cdot \frac{a}{3}$$

$b = 0$ $\qquad$ $b = 0 \; ; \; c = 0$



- A veces, es frecuente tener troncos originados al interceptar la superficie lateral de un prisma con dos planos como en la figura 5; donde $\overline{AB}$, $\overline{CD}$ y $\overline{EF}$ son aristas del tronco.

$$V = \left(\begin{array}{c}\text{área de una}\\ \text{sección recta}\end{array}\right) \cdot \left(\frac{AB + CD + EF}{3}\right)$$

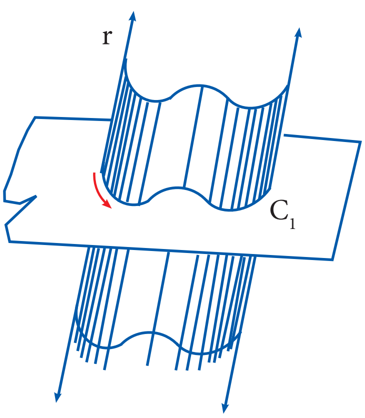


CILINDRO Y TRONCO DE CILINDRO

Superficie cilíndrica

Es la superficie generada, al deslizarse una recta (generatriz), a lo largo de una curva, (directriz), manteniéndose paralela a su posición inicial.

Fig. 1



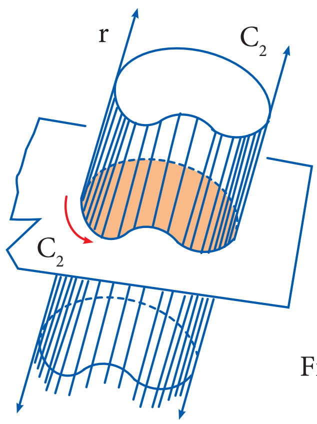


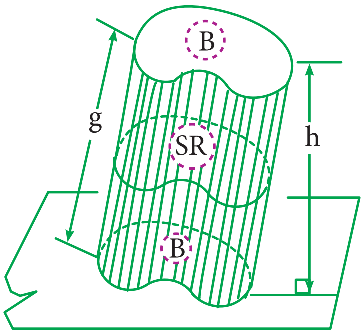
Fig. 2

En la figura 1: r, es la generatriz de la superficie cilíndrica y c_1, la directriz. Como c1 no es cerrada, la superficie obtenida es abierta.
En la figura 2: c_2 es una curva cerrada, luego, la superficie generada es cerrada.

Cilindro

Es el sólido obtenido al interceptar una superficie cilíndrica cerrada, por medio de dos planos paralelos. Las regiones que determinan dichos planos, son las bases del cilindro y la distancia entre ellos es la altura. Las bases son congruentes.
Si «B», es el área de una base y «h» longitud de la altura; el volumen del sólido se evalúa:

$$\boxed{V = B \cdot h}$$



- En la figura, el segmento de longitud g, es la generatriz del cilindro.
- La sección recta del cilindro, es la intersección del sólido con un plano perpendicular a las generatrices. (Todas las generatrices del cilindro, son congruentes).
- El cilindro es oblicuo, si las generatrices son oblicuas a las bases.
- El cilindro es recto, si las generatrices son perpendiculares a las bases. En este caso: g = h y además, las secciones rectas son congruentes a las bases.
- Si «C», es el perímetro de una sección recta, entonces el área de la superficie lateral, se expresa:

  $$\boxed{S_L = C \cdot g}$$

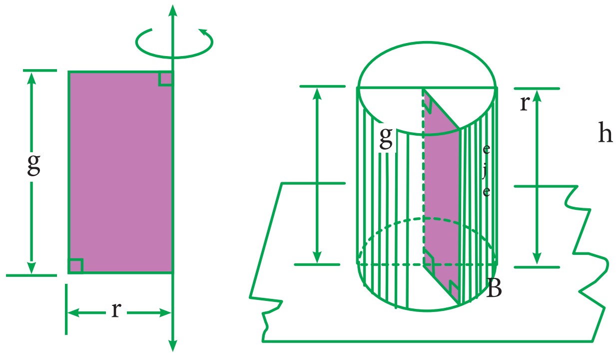
  Y, el área total: $\boxed{S_t = S_L\ 2B}$

- Si SR, es el área de una sección recta, el volumen:
  $\boxed{V = (SR) \cdot g}$

Cilindro de revolución

Se genera al girar una región rectangular, una vuelta, alrededor de un eje que contiene a un lado.

Las bases son círculos y la altura mide igual que la generatriz. Es también llamado cilindro circular recto.



Fórmulas:

Área lateral: $\boxed{S_L = 2\pi rg}$

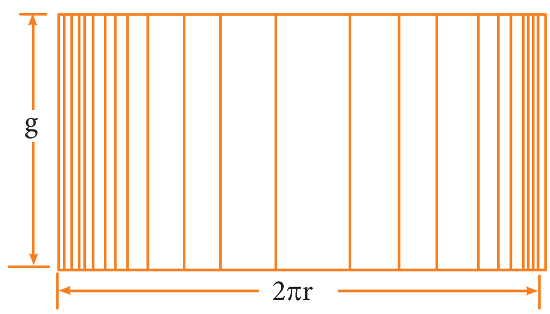
Área total: $\boxed{S_t = S_L + 2B}$

Volumen: $\boxed{V = Bh}$

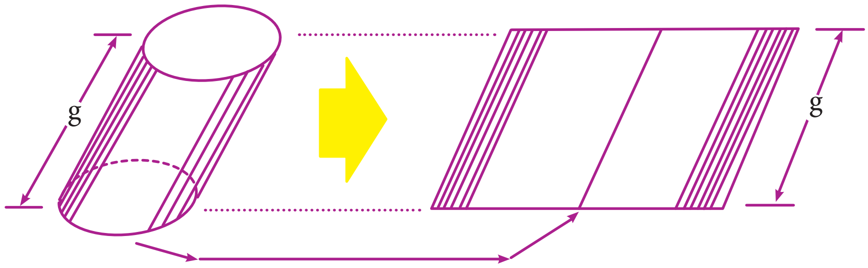
En este caso: $\boxed{B = \pi r^2}$

Desarrollo de la superficie lateral

Es la región rectangular, obtenida al extender (desarrollar) la superficie lateral, de modo que los lados del rectángulo sean la generatriz y las circunferencias de las bases, del cilindro de revolución original.

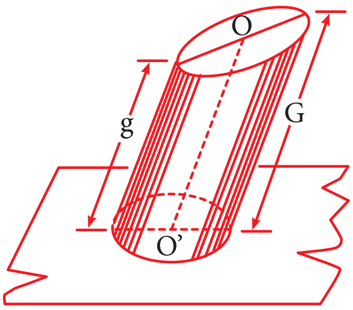


Nota
En el caso de un cilindro oblicuo, el desarrollo puede resultar romboide o rombo.



Tronco de cilindro

Se obtiene al intersectar la superficie lateral de un cilindro, con un plano no paralelo a las bases.



En la figura 1, $\overline{OO'}$ es el eje del tronco; g y G, son longitudes de dos generatrices opuestas. (g < G).
Las secciones rectas del tronco son las mismas que del cilindro original.
El volumen se puede evaluar, así:

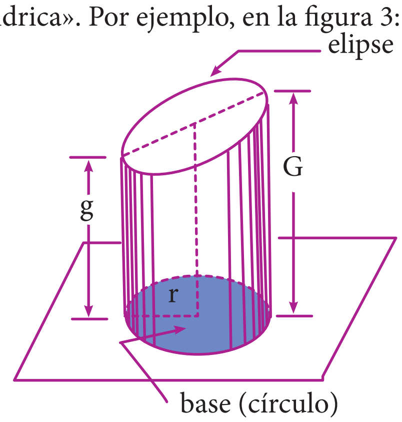
$$\boxed{V = (\text{área de una sección recta}) \cdot OO'}$$

Donde: $OO' = \dfrac{g + G}{2}$

- Si el tronco se deriva de un cilindro de revolución, su volumen es:

$$\boxed{V = \pi r^2 \left(\frac{g + G}{2}\right)}$$ (figura 2)

- Si una generatriz es nula, el sólido se llama «cuña cilíndrica». Por ejemplo, en la figura 3:



$$V = \pi r^2 \left(\frac{0 + G}{2}\right)$$

$$\therefore \boxed{V = \pi r^2 \frac{G}{2}}$$

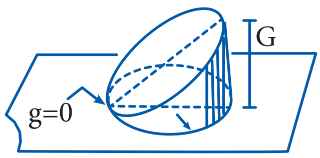
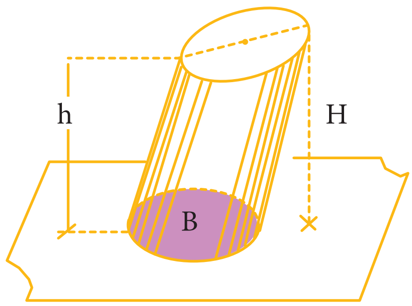


Fig.3

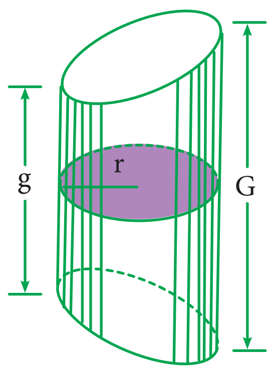
- Otras posibilidades



$$\boxed{V = B\left(\frac{h + H}{2}\right)}$$ h y H: alturas (h < H)
B: área de la base

Tronco de cilindro de revolución, con dos bases elípticas.
área de la sección recta: πr^2

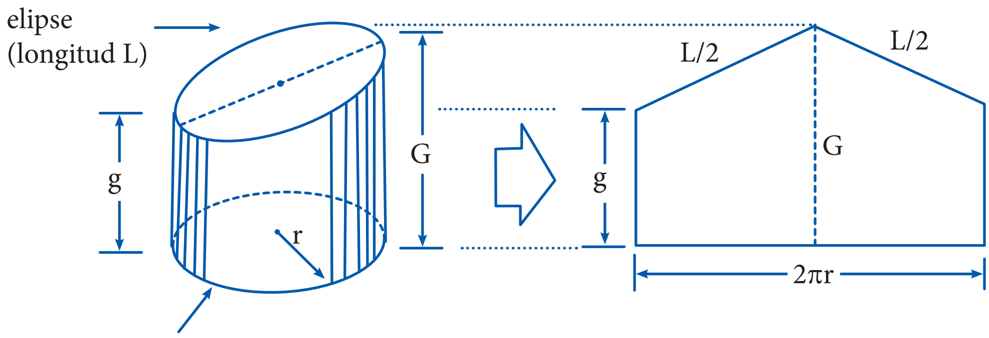
$$\boxed{V = \pi r^2 \left(\frac{g + G}{2}\right)}$$



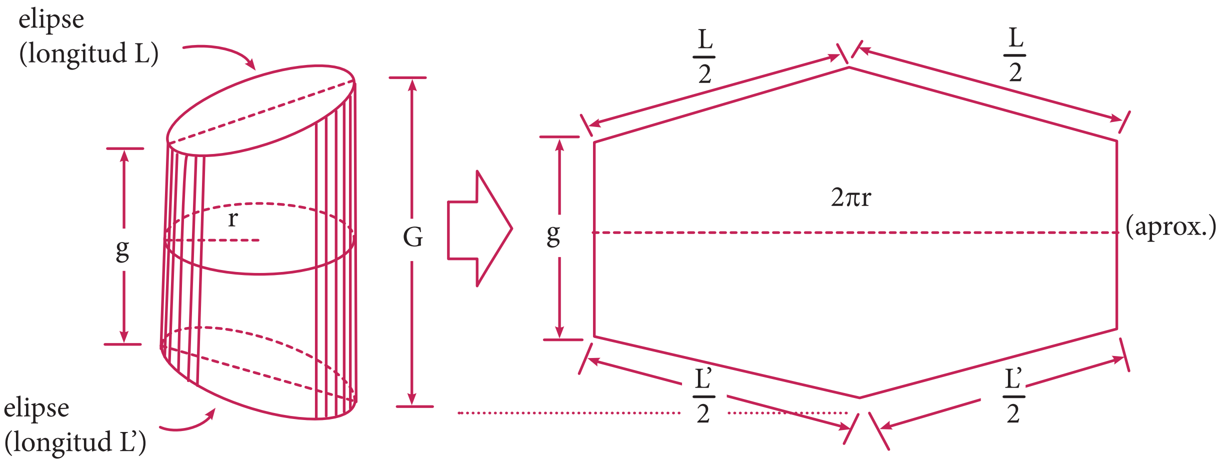
(Si g = 0, se trata de una cuña cilíndrica)

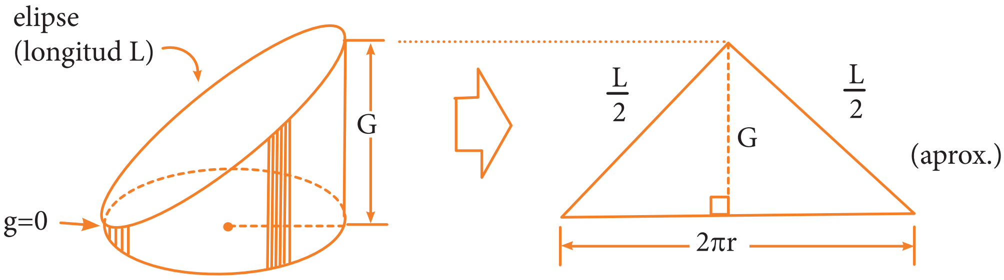
Algunos «desarrollos» de las superficies laterales de troncos de cilindro, son:

a)



b)





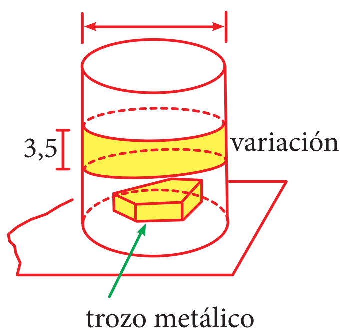
Problemas resueltos

1. Un cilindro está lleno de agua hasta la mitad. Se suelta un pedazo metálico y el nivel del agua sube en 3,5 cm. Si el diámetro del cilindro es 8 cm, ¿cuál es el volumen del pedazo?

   Resolución:

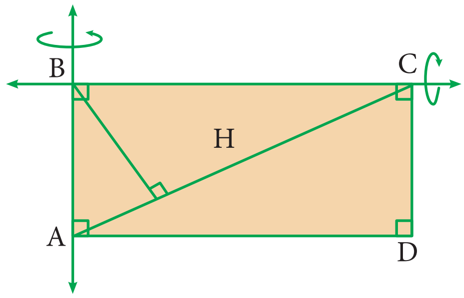
   La variación es debida al trozo metálico, y su volumen es:

   $\left(\pi \cdot \frac{8^2}{4}\right)(3{,}5) = 175$



2. ABCD, es un rectángulo. Se traza $\overline{BH} \perp \overline{AC}$. Si V_1 y V_2, son los volúmenes de los sólidos obtenidos al girar la región triangular ABCD, alrededor de $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$, respectivamente.

Halla: $\frac{V_1}{V_2}$, si: $\frac{AH}{HC} = \frac{4}{25}$



Resolución:

Con el gráfico:

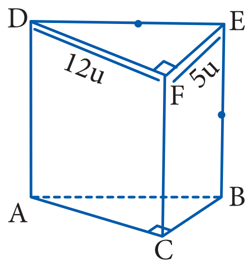
Alrededor de $\overline{AB}$

$V_1 = \pi(BC)^2 \cdot AB$

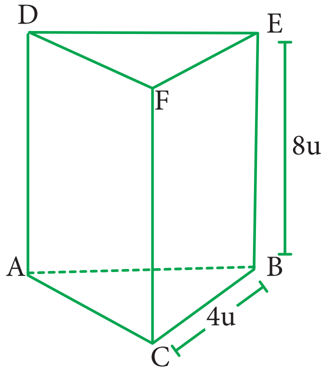
Trabajando en clase

Integral

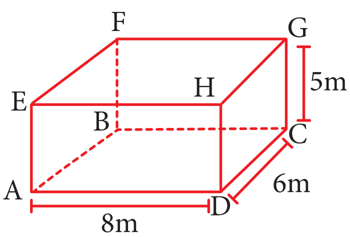
1. Calcula el volumen del prisma recto.



2. Calcula el área de la superficie lateral del prisma regular.

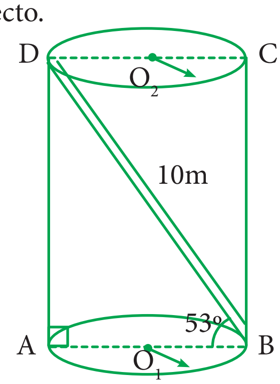


3. Calcula la diagonal del rectoedro.



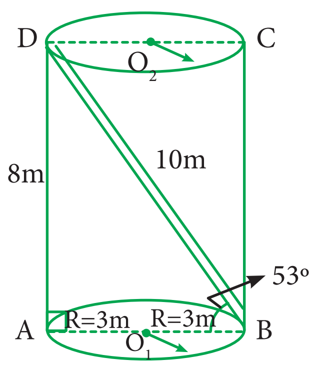
PUCP

4. Calcula el área de la superficie lateral del cilindro circular recto.



Resolución:

De la figura



◺ADB: (37º y 53º)

$\Rightarrow$ AD = 8 m y AB = 6 m

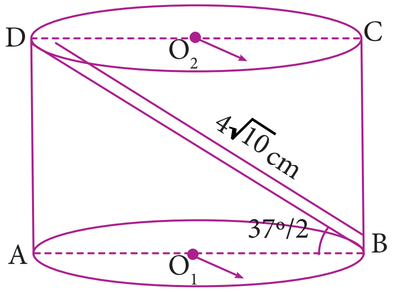
También 2R = 6 m $\Rightarrow$ R = 3 m

Finalmente: $S_L = 2\pi RH$

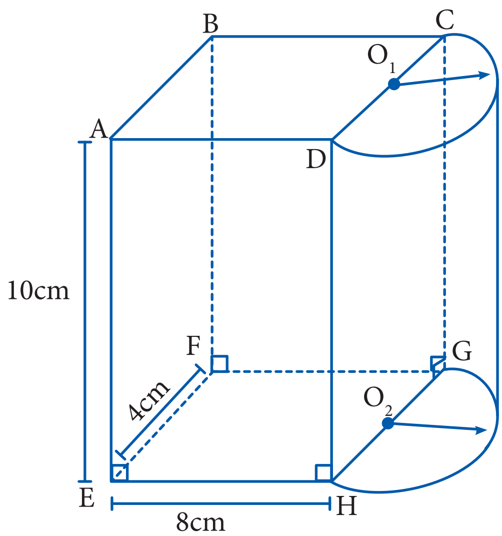
$S_L = 2\pi(3)(8)$

$S_L = 48\ \pi m^2$

5. Calcula el área de la superficie lateral del prisma recto.



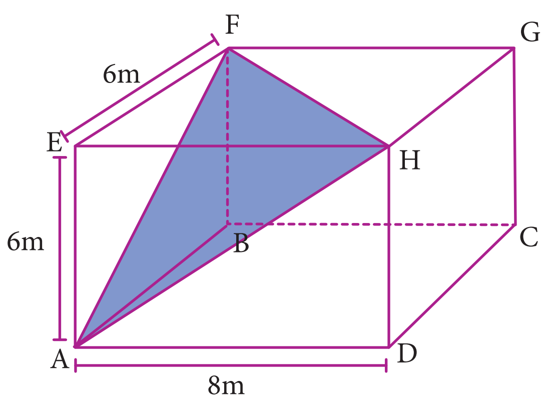
6. Calcula el volumen del sólido.



7. Dado un prisma recto cuya base es un hexágono regular inscrito en una circunferencia de diámetro 8 m y cuya altura es igual en longitud al diámetro. Calcula el volumen del prisma.

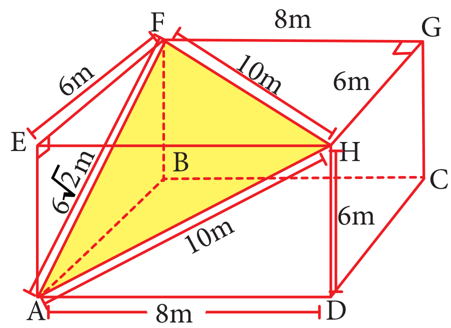
UNMSM

8. Calcula el área de la región sombreada, si ABCD – EFGH es un rectoedro.



Resolución:

Completando la figura:



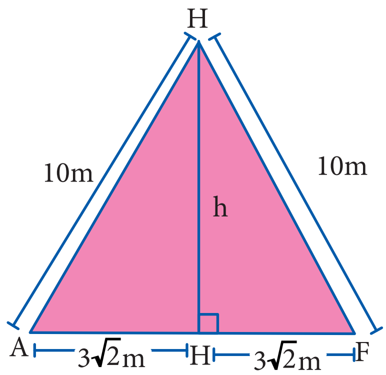
En el triángulo AEF:

AF = $6\sqrt{2}$ m

En el triángulo ADH y FGH:

AH = 10 m = FH

Luego:



$10^2 = h^2 + (3\sqrt{2})^2$

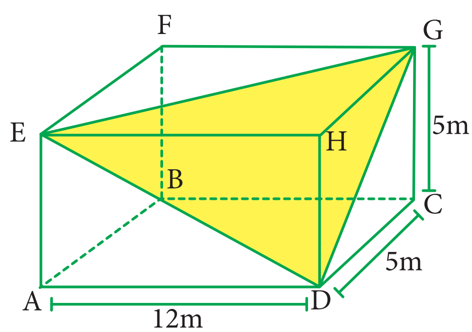
$100 = h^2 + 18$

$h = \sqrt{82}$ m

$$S_{AHF} = \frac{(6\sqrt{2})(\sqrt{82})}{2}$$

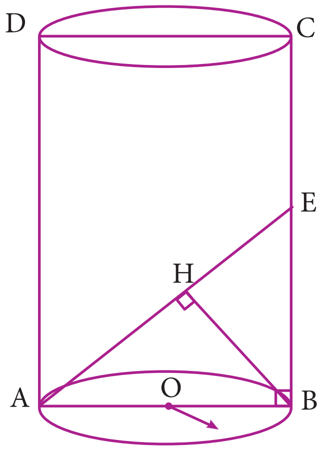
$S_{AHF} = 6\sqrt{41}$ m^2

9. Calcula el área de la región sombreada, si ABCD – EFGH es un rectoedro.



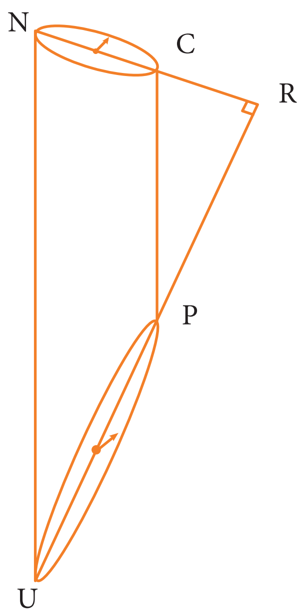
10. Se inscribe un cilindro en un prisma triangular. Calcula la razón entre las áreas de las superficies laterales del prisma con respecto al cilindro.

11. Calcula el volumen del cilindro circular recto, si AH = 2(HE) = 6 cm, además, E es un punto medio de la generatriz $\overline{BC}$ y $\overline{AB}$ es diámetro.



UNI

12. La figura muestra un tronco de cilindro oblicuo, si $(UN)^2 - (CP)^2 = 30\ m^2$ y $m\angle NUP = 15°$. Calcula el área de su superficie lateral.

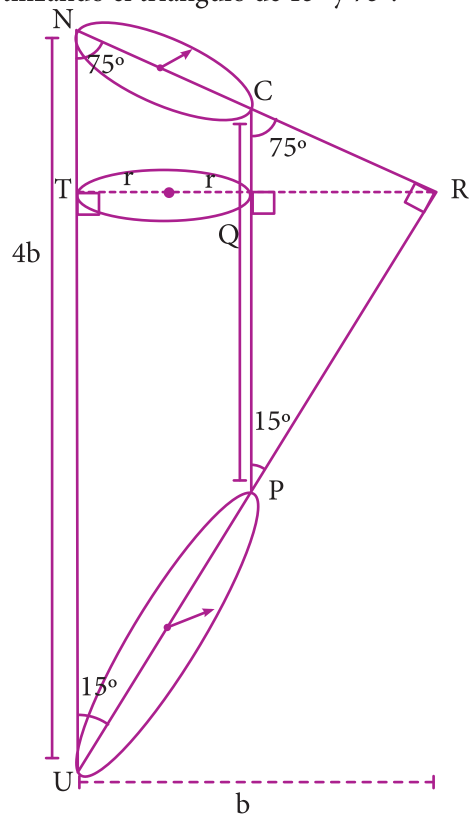


Advertencia pre

Para todo prisma se cumple que su volumen es el producto del área de su base con la altura.

Resolución:

Utilizando el triángulo de 15° y 75°.



Si QR = a

$\Rightarrow$ CP = 4a

Si: TR = b

$\Rightarrow$ UN = 4b

Dato: $(4b)^2 - (4a)^2 = 30$

$16(b^2 - a^2) = 30$

$\Rightarrow b^2 - a^2 = \dfrac{15}{8}$ (1)

Sabemos:

$S_L = 2\pi r\left(\dfrac{UN + CP}{2}\right)$

$S_L = \pi r \cdot (UN + CP)$ ... (2)

Luego: TR – QR = 2r

$b - a = 2r$

$r = \dfrac{b - a}{2}$

Reemplazando en (2)

$S_L = \pi\left(\dfrac{b - a}{\cancel{2}}\right)(\cancel{4}b + \cancel{4}a)$

$S_L = 2\pi\,(b - a)(b + a)$

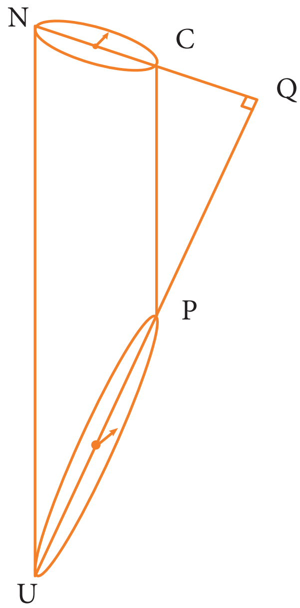
$S_L = 2\pi\,(b^2 - a^2)$

Finalmente:

$S_L = 2\pi\left(\dfrac{15}{8}\right)$

$\therefore S_L = 15\pi/4\ m^2$

13. La figura muestra un tronco de cilindro oblicuo, si $(UN)^2 - (CP)^2 = 32\ cm^2$ y $m\angle NUP = 15º$. Calcula el área de su superficie lateral.



14. Calcula el volumen del sólido, si se muestran prismas regulares y un cilindro circular recto.