Materiales Educativos GRATIS

ALGEBRA TERCERO

POTENCIACIÓN Y ECUACIÓN EXPONENCIAL

POTENCIACIÓN

$$\boxed{a^n = P}$$

a : base: $a \in \mathbb{R}$

n : exponente; $n \in \mathbb{N}$

P: potencia: $P \in \mathbb{R}$

DEFINICIONES

1. Exponente natural

Si $a \in \mathbb{R} \wedge n \in \mathbb{N}^+$, definimos:

$$\boxed{\underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{\text{"n" veces}} = a^n}$$

Ejemplos:

a. $\underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2}_{\boxed{10}\text{ veces}} = 2^{\boxed{10}} = 1024$

b. $\underbrace{x \cdot x \cdot x \cdot \ldots \cdot x}_{\boxed{m}\text{ veces}} = x^{\boxed{m}}; m \in \mathbb{N}^+$

2. Exponente negativo:

Si: $a \in \mathbb{R} - \{0\}$, definimos:

$$a^{-n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n = \frac{1}{a^n}$$

Ejemplos:

a) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-2} = \left(\frac{3}{a}\right)^2 = \frac{9}{4}$

b) $\left(\frac{1}{5}\right)^{-3} = 5^3 = 125$

3. Exponente cero:

Si: $a \in \mathbb{R} - \{0\}$, definimos:

$$\boxed{a^0 = 1}$$

Observación:

0^0 no esta definido.

Ejemplos:

$(-3)^0 = 1$ $\qquad \Rightarrow \underbrace{\left(\sqrt{4} - 2\right)^0 = 0^0}_{\substack{\text{no definido} \\ \text{¡Cuidado!}}}$

TEOREMAS

1. $\boxed{a^m \cdot a^n = a^{m+n}}$

a) $m^3 \cdot m^{-5} \cdot m^6 = m^4$ b) $b^4 \cdot b^3 = b^7$

2. $\boxed{\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}}$; $a \in \mathbb{R} - \{0\}$; $m \geq n$

a) $\frac{m^6}{m^3} = m^{6-3} = m^3$ b) $\frac{b^7}{b^{-3}} = b^{7-(-3)} = b^{10}$

3. $\boxed{\left(a^m\right)^n = a^{m \cdot n}}$

a) $\left(m^3\right)^2 = m^6$ b) $\left(a^{-4}\right)^5 = a^{-20}$

¡Cuidado…!

$$\underbrace{\left(a^{-3}\right)^2}_{a^{-6}} \neq \underbrace{a^{(-3)^2}}_{a^9} \neq \underbrace{a^{-3^2}}_{a^{-9}}$$

$$a^{-6} \neq a^9 \neq a^{-9}$$

4. $\boxed{\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}; b \neq 0}$

5. $\boxed{(ab)^n = a^n \cdot b^n}$

a) $(2m)^3 = 2^3 \cdot m^3 = 8m^3$

Ecuaciones exponenciales

Son aquellas donde la incógnita aparece únicamente en el exponente.

Propiedades:

1. $\boxed{a^x = a^y}$ $a \neq \{-1; 01\} \Rightarrow \boxed{x = y}$

2. $\boxed{a^x = b^x}$ $a \neq b \Rightarrow \boxed{x = 0}$

Trabajando en clase

1. Reduce:

$$A=\frac{(x^7)^m.(x^3)^m}{x^{10m}}$$

$x \neq 0$

2. Reduce:

$$\frac{\overbrace{x^2\cdot x^2\cdot x^2\cdot\ldots\cdot x^2}^{(m+5)\text{ veces}}\cdot\overbrace{x^3\cdot x^3\cdot x^3\cdot\ldots\cdot x^3}^{(2m-1)\text{ veces}}}{\underbrace{x^4\cdot x^4\cdot x^4\cdot\ldots\cdot x^4}_{(2m-1)\text{ veces}}}$$

3. Reduce:

$$M=\left(a^3\right)^2\cdot a^{-3^2}\cdot a^{(-3)^2}\cdot\left(a^{-3}\right)^2\cdot\left(a^{-3}\right)^{-2}$$

4. Calcula:

$$M=\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}+\left(\frac{1}{3}\right)^{-1}+\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}+\left(\frac{3}{5}\right)^{0}$$

Resolución:

$$M=\left(\frac{1}{2}\right)^{\boxed{-2}}+\left(\frac{1}{3}\right)^{\boxed{-1}}+\left(\frac{1}{2}\right)^{\boxed{-3}}+\left(\frac{3}{5}\right)^{0}$$

$$2^2 \quad + \quad 3^1 \quad + \quad 2^3 \quad + \quad 1 \quad =16$$

5. Calcula:

$$R=\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}+\left(\frac{4}{3}\right)^{-1}+\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}+5^0$$

6. Simplifica:

$$\frac{6^3\cdot 12^4\cdot 15^6\cdot 5^9}{10^{11}\cdot 3^{13}\cdot 5^4}$$

7. Calcula "R" en:

$$1+2^{4+1^{3+1^{2+3^8}}}=R+30$$

8. Simplifica

$$A=\frac{3^{x+1}+3^{x+2}+3^{x+3}}{3^{x-1}+3^{x-2}+3^{x-3}}$$

Resolución:

Se factoriza, tanto como en el numerador y denominador, la base de menor exponente:

$$A=\frac{3^{x+1}\left(1+3^1+3^2\right)}{3^{x-3}\left(3^2+3^1+1\right)}=\frac{3^{x+1}}{3^{x-3}}=3^4=81$$

9. Simplifica:

$$R=\frac{5^{x+3}+5^{x+4}+5^{x+5}}{5^{x-3}+5^{x-4}+5^{x-5}}$$

10. Calcula:

$$J=\frac{2^{x+2}\cdot 4^{x+2y}}{8^{x-2}\cdot 16^{y+2}}$$

11. Resuelve:

$$\underbrace{4\cdot 4\cdot 4\cdot\ldots\cdot 4}_{(x-4)\text{veces}}=\underbrace{8+8+8+\ldots+98}_{8\text{ veces}}$$

12. Luego de resolver:

$$2^x\cdot 4^{x+1}\cdot 8^{x+2}=16^{x+3}$$

Da como respuesta el valor de x^2.

Resolución:

Como observamos las bases son potencias de 2.

$$2^x\times(2^2)^{x+1}\times(2^3)^{x+2}=(2^4)^{x+3}$$

$$2^x\cdot 2^{\overset{2x+2}{2^{x+1}}}\cdot 2^{\overset{3x+16}{3^{x+2}}}=2^{\overset{4x+12}{4^{x+5}}}$$

Al tener producto de bases iguales se tiene:

$$\boxed{2}^{\boxed{6x+8}}=\boxed{2}^{\boxed{4x+12}}$$

$$\therefore 6x+8=4x+12$$

$$2x=4$$

$$x=2$$

13. Luego de resolver:

$$3^x\cdot 27^{x+4}\cdot 8^{x+1}=243^{x+5}$$

Da como respuesta "x + 3"

14. Sabiendo que:

$$x^y=2\wedge y^x=\frac{1}{2}$$

Determina el valor de:

$$\left(x^{y^{1+x}}\cdot y^{x^{1-y}}\right)$$