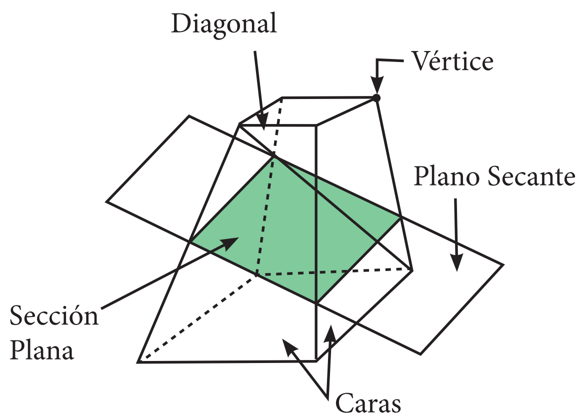
POLIEDROS REGULARES

Poliedro

Es un sólido geométrico limitado por cuatro o más regiones poligonales, denominadas caras. Los lados comunes de las caras se denominan aristas, y estas concurren en puntos llamados vértices.



Diagonal

Segmento que une dos vértices de caras diferentes. Las denominacioness de los poliedros, están en función al número de caras que presenta. Así tenemos: tetraedro (4 caras), pentaedro (5 caras), … etc.

Teorema de Euler

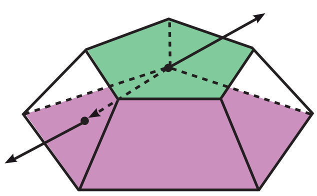
En todo poliedro convexo se cumple que el número de caras más el número de vértices es igual al número de aristas más dos. Así, tenemos:

$$\boxed{C + V = A + 2}$$

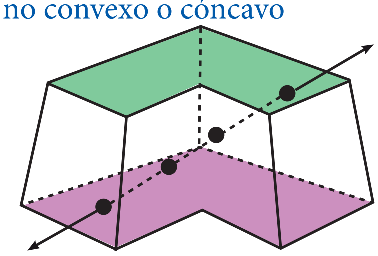
C: número de caras
V: número de vértices
A: número de aristas

Clases de poliedros

Poliedro convexo



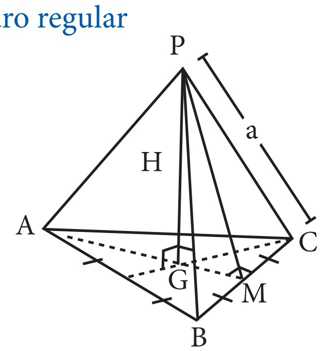
Poliedro no convexo o cóncavo



Poliedros regulares

Son poliedros que poseen caras regulares y congruentes entre sí y en cada vértice concurren el mismo número de aristas. Estos son solo cinco:

1. Tetraedro regular



Notación: tetraedro regular

P – ABC

Sus caras: cuatro triángulos equiláteros congruentes

Aristas: $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{AC}$, $\overline{AP}$, $\overline{PC}$, y $\overline{PB}$

$AB = BC = AC = AP = PC = PB = a$

❖ Altura: $\overline{PG}$

G: baricentro del triángulo ABC.

Altura del tetraedro $\boxed{PG = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}}$ Altura de la cara $\boxed{PM = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}}$

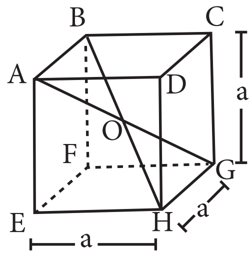
❖ Área de la superficie total (A_{ST}):

$$\boxed{A_{ST} = a^2\sqrt{3}}$$

❖ Volumen

$$\boxed{V = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{12}}$$

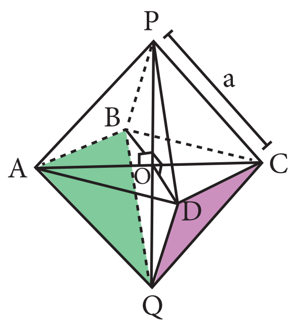
2. Hexaedro regular o cubo



Notación: cubo ABCD – EFGH
Sus caras: seis cuadrados congruentes
Aristas: todas de medidas iguales
AB = BC = CD = … = a
Centro: O

- Diagonal: $\overline{AG}$, $\overline{BH}$, … $\boxed{AG = a\sqrt{3}}$
- Volumen : $\boxed{V = a^3}$
- Área de la superficie total: $\boxed{A_{ST} = 6a^2}$
- Área de la superficie laterales: $\boxed{A_{SL} = 4a^2}$

3. Octaedro regular



Notación: octaedro regular
P – ABCD – Q
Sus caras: ocho triángulos equiláteros congruentes
Aristas: todas son congruentes
AP = PC = PD = … = a
Centro: O

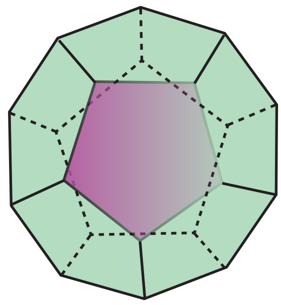
- Diagonal: $\overline{AC}$, $\overline{PQ}$ y $\overline{BD}$

  $\boxed{BD = AC = PQ = a\sqrt{2}}$

- Área de la superficie total: $\boxed{A_{ST} = 2a^2\sqrt{3}}$
- Volumen: $\boxed{V = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{3}}$

4. Dodecaedro regular

Poliedro regular limitado por doce regiones pentagonales regulares congruentes.



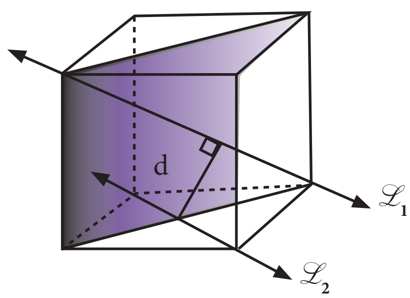
5. Icosaedro regular

Poliedro regular que presenta veinte regiones triangulares equiláteras congruentes.

Recuerda:
El tetraedro es una pirámide regular.

¡Sugerencia!

Cuando nos pidan hallar «d»: distancia entre $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_1}$ y $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_2}$ en el cubo mostrado:



Para calcular «d» debemos proyectar $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_1}$ y $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_2}$ en un mismo plano, de modo que $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_1}$ o $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_2}$ $\perp$ ▱ y la distancia será el segmento que une el pide de $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_2}$ con el pie de la perpendicular a $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_1}$.

Trabajando en clase

Integral

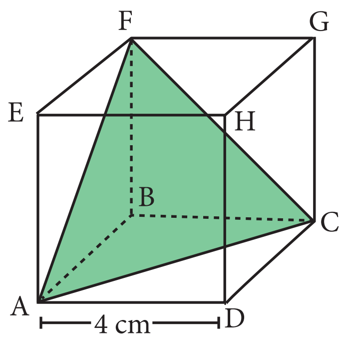
1. Si la arista de un tetraedro regular mide 8 u, calcula la longitud de la altura de la cara.

2. Si la diagonal de un octaedro regular mide $6\sqrt{2}$ u, calcula su volumen.

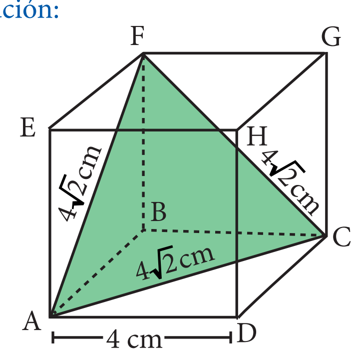
3. Si la diagonal de un cubo mide $7\sqrt{3}$m, calcula el área de su superficie lateral.

PUCP

4. Calcula el área de la región sombreada, si ABCD – EFGH es un hexaedro regular.



Resolución:

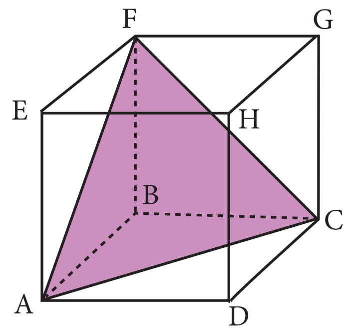


Triángulo equilátero

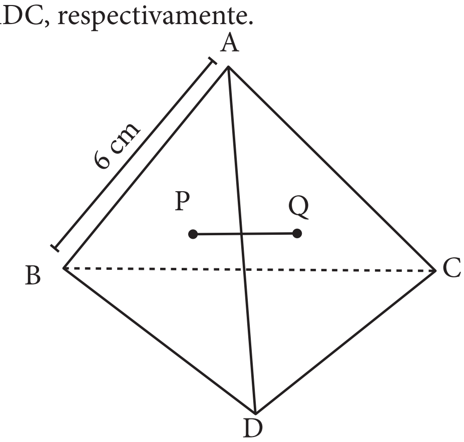
$$S_{AFC} = \frac{\ell^2\sqrt{3}}{4} = \frac{(4\sqrt{2})^2\sqrt{3}}{4}$$

$$S_{AFC} = 8\sqrt{3}\ cm^2$$

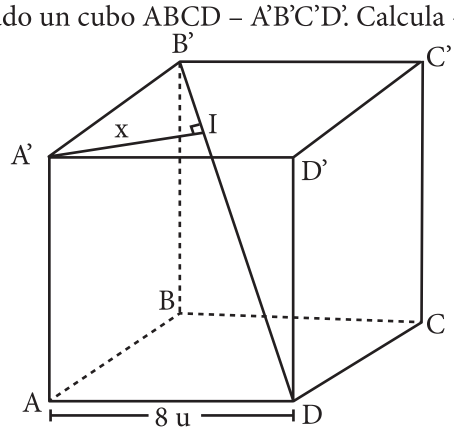
5. Si el área de la región sombreada es $6\sqrt{3}m^2$. Calcula la longitud de la diagonal del cubo.



6. Si A – BCD es un tetraedro regular. Calcula «PQ», si P y Q son baricentros de los triángulos ABD y ADC, respectivamente.



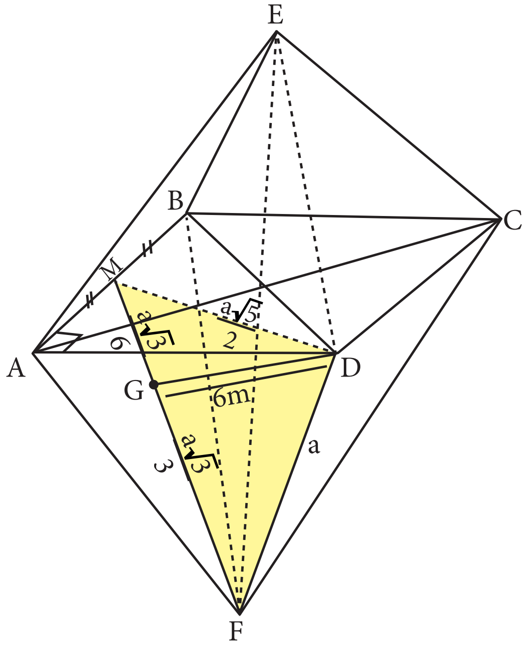
7. Dado un cubo ABCD – A'B'C'D'. Calcula «x».



UNMSM

8. En un octaedro regular, la distancia de un vértice al baricentro de la cara opuesta a dicho vértice mide 6 m. calcula el área de la superficie total de dicho sólido.

Resolución:



Trazamos $\overline{FM}$: mediana

$\overline{DG} = 6m$ (G: baricentro)

Calculamos «DM»

Triángulo MAD, aplicando el T. de Pitágoras

$a^2 + \left(\frac{a}{2}\right) = MD^2$

$\therefore MD = \frac{a\sqrt{5}}{2}$

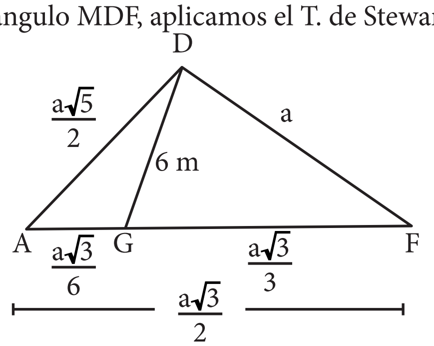
Sabemos que: $MF = \frac{a}{2}\sqrt{3}$ y

$2MG = GF$

$\Rightarrow\ MG = \frac{a\sqrt{3}}{6}$ y

$GF = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

Triángulo MDF, aplicamos el T. de Stewart:



$$\left(\frac{a\sqrt{5}}{2}\right)^2\cdot\frac{a\sqrt{3}}{3}+a^2\cdot\left(\frac{a\sqrt{3}}{6}\right)=6^2\cdot\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)+\frac{a\sqrt{\cancel{3}}}{6}\cdot\frac{a\sqrt{\cancel{3}}}{\cancel{3}}\cdot\frac{a\sqrt{3}}{2}$$

$$\frac{5a^2}{4}\cdot\left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)+\frac{a^3\sqrt{3}}{6} = 18a\sqrt{3} + \frac{a^3\sqrt{3}}{12}$$

$$\frac{a^3\sqrt{\cancel{3}}}{2} = 18a\sqrt{3}$$

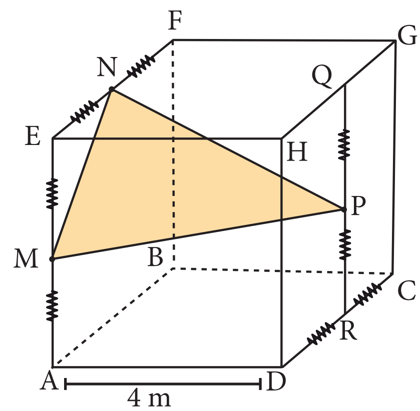
$a^2 = 36$

$a = 6$ m

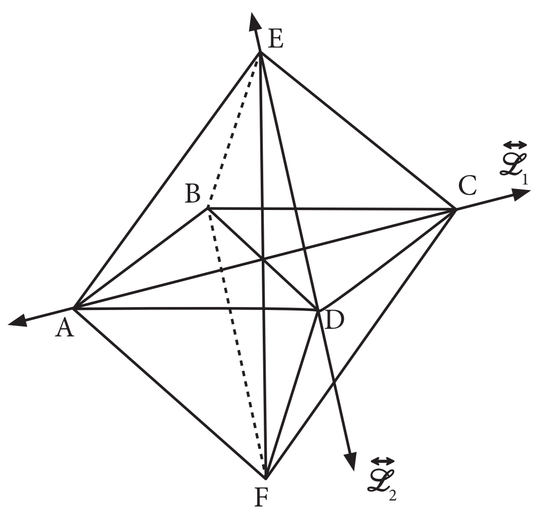
Piden: $A_{ST} = 2a^2\sqrt{3} = 72\sqrt{3}\,m^2$

9. En un octaedro regular, la distancia de un vértice al baricentro de la cara opuesta a dicho vértice mide 8 cm. Calcula la longitud de la diagonal de dicho octaedro.

10. Calcula el área de la región sombreada, si ABCD – EFGH es un cubo.



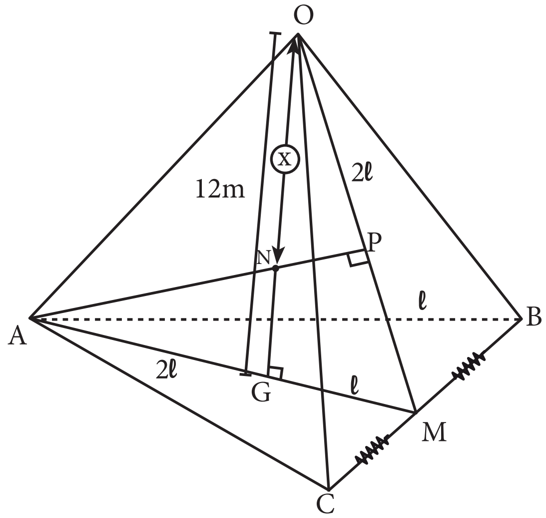
11. Dado el octaedro regular cuya arista mide 8 m. calcula la mínima distancia entre las rectas $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_1} // \overleftrightarrow{\mathscr{L}_2}$.



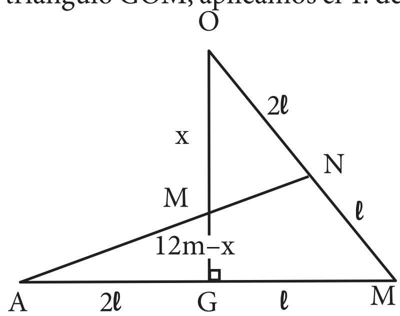
UNI

12. Se tiene un tetraedro regular O – ABC, si la distancia de un vértice O al baricentro de la cara opuesta G mide 12 m. Calcula la distancia de dicho vértice a la intersección de las alturas del triángulo AOM (M: Punto medio de $\overline{BC}$).

Resolución:



En el triángulo GOM, aplicamos el T. de Menelao.



$\ell(x)(2\ell) = (2\ell)(12m - x)(3\ell)$

$x = 36\text{ m} - 3x$

$4x = 36\text{ m}$

$\therefore\ x= 9\text{ m}$

13. Se tiene un tetraedro regular O – ABC, si la distancia de un vértice O al baricentro (G) de la cara opuesta mide 16 m. calcula la distancia del punto de intersección de las alturas del triángulo AOM (M: Punto medio de $\overline{BC}$) al baricentro «G».

14. Calcula el área de la proyección ortogonal de una cara de un tetraedro regular, sobre otra cara, si el área de la superficie total es 600 m^2.

Advertencia pre

- En el icosaedro regular:
  $A_{ST} = 5a^2\sqrt{3}$

Recordar que son 20 triángulos equiláteros.