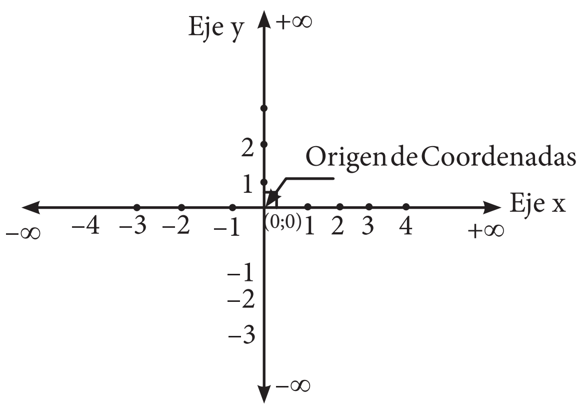
PLANO CARTESIANO

El sistema de los números reales, es el conjunto R, el cual, está asociado a la recta numérica real o eje x.
Entonces, el producto R × R = R^2 es el conjunto de todos los pares ordenados del plano que está determinado por dos rectas númericas reales perpendiculares, siendo estos, horizontal o plano cartesiano y a la intersección de los ejes se denomina origen de coordenadas.
En el gráfico, muestra el plano cartesiano, entonces, del origen de coordenadas hacia la derecha, se ubican los puntos cuyos números asociados son positivos y a la izquierda los puntos cuyos números asociados son negativos, en el eje vertical, del origen hacia arriba se ubican los puntos cuyos números son positivos y hacia abajo los puntos cuyos números asociados son negativos.



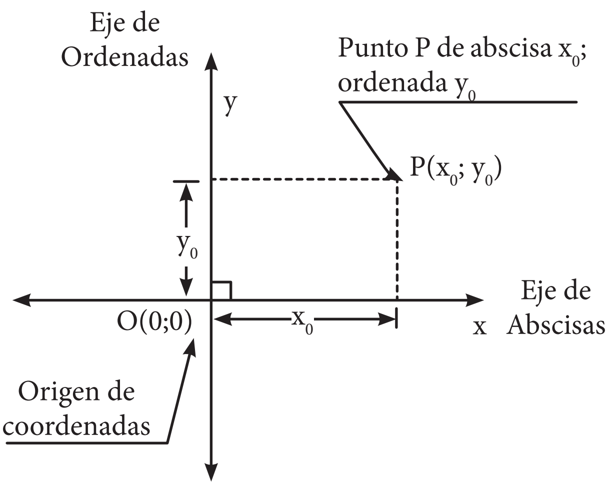
Ubicación de un punto en el plano cartesiano

Postulado

En todo plano existen infinitos puntos.

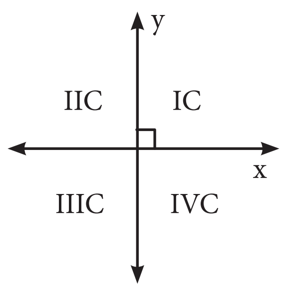
Entonces, en el plano cartesiano, existen infinitos puntos y a cada punto se le asocia un único par o pareja de números, el cual se denomina **Par Ordenado** $(x_{0;}\ y_0)$

Estas son distancias a los ejes o pertenecen a dichos, el cual, está fijado por una recta horizontal denominada, eje de abscisas o **eje x** y otra recta vertical denominado eje de ordenadas o **eje y**.



Notación de Par Ordenado
$(x_0; y_0)$ donde:
x_0: es la abscisa
y_0: es la ordenada

Nota:
Los ejes coordenadas determinan en el plano cartesiano cuatro regiones los cuales se denominan cuadrantes, tomado en sentido antihorario primer cuadrante (IC), segundo cuadrante (IIC), tercer cuadrante (IIC) y cuarto cuadrante (IVC).



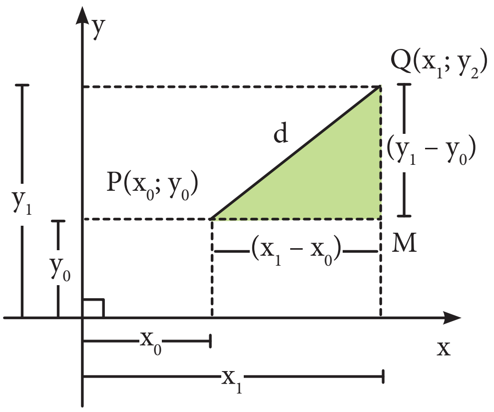
- Al plano cartesiano se denomina también sistema de coordenadas rectangulares o sistema x – y.
- El conjunto de todo los pares ordenados (x,y) se denomina plano numérico y se denota po R^2, así:

$$R^2 = \{(x; y)\} / x \in R, y \in R\}$$

En el plano cartesiano se realizan las siguientes aplicaciones:

Distancia entre dos puntos

La distancia entre dos puntos cualesquiera $P(x_0; y_0)$ y $Q(x_1; y_1)$ en el plano cartesiano, esta dado por:



En la figura:

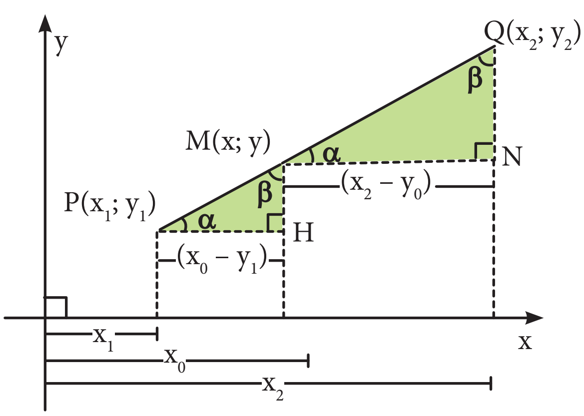
◺PMQ: aplicando el teorema de Pitágoras.

$$d^2_{(P,Q)} = (x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2$$

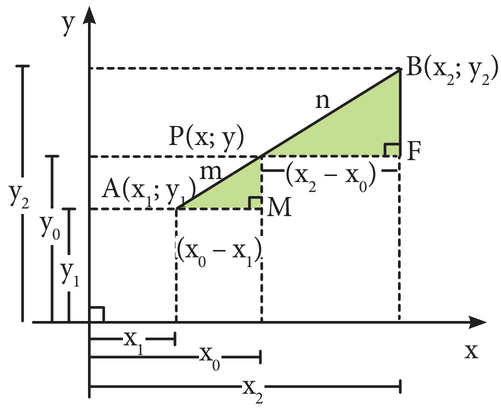
$$d_{(P,Q)} = \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2}$$

División de un segmento en un razón dada

Sean los puntos $P(x_1; y_1)$ y $Q(x_1; y_1)$ y $M(x; y)$ un punto del $\overline{PQ}$, tal que: $\dfrac{PM}{MQ} = r$, entonces las coordenadas de M esta dado por:



Dadas las coordenadas $(x_1; y_1)$ y $(x_2; x_2)$ de los puntos A y B, luego, las coordenadas de un punto P que pertenece a $\overline{AB}$ tal que AP = m y PB = n se expresa en función de dichas coordenadas y de m, n.



En la figura:

◺AMP ~ ◺PFB

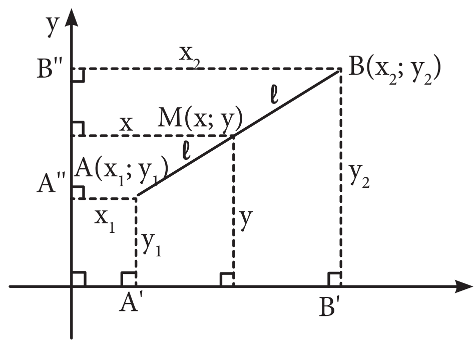
$$\frac{x - x_1}{x_2 - x} = \frac{m}{n} \Rightarrow x = \frac{xn_1 + mx_2}{m + n}$$

En forma análoga, se obtiene y_0:

$$y = \frac{ny_1 + my_2}{m + n}$$

Punto medio de un segmento

Dado el segmento de extremos A y B, cuyas coordenadas son $A = (x_1; y_1)$, $B = (x_2; y_2)$ y M es el punto medio de $\overline{AB}$, tal que: M = (x; y), luego las coordenadas del punto M se respectivas coordenadas de A y B.

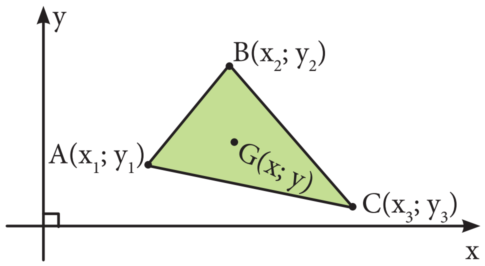


En la figura, por base media en los trapecios rectángulos AA'B'B y AA"B"B.

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} \qquad x = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

Cálculo de las coordenadas del baricentro de una región triangular

Las coordenadas del baricentro de una región triangular, siempre está, en función de las coordenadas de sus vértices.

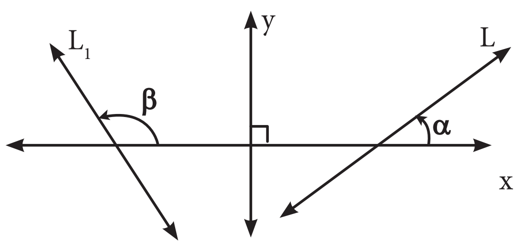


En la figura, G es baricentro de la región triangular ABC.
Luego:

$$x = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3} \qquad y = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}$$

Inclinación de una recta

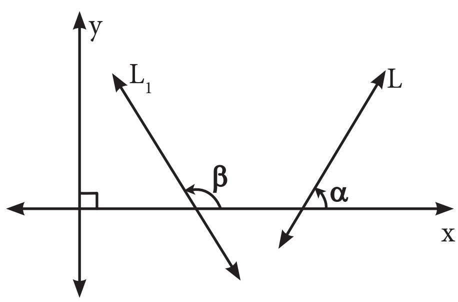
Es el ángulo que forma la recta con el eje de abscisas. Se mide a partir del eje x hasta la ubicación de la recta, tomado en sentido antihorario.



α : Medida del ángulo entre la recta L y el eje x.
β : Medida del ángulo entre la recta L_1 y el eje x.

Pendiente de una recta

Se denomina pendiente de una recta a la tangente trigonométrica de la medida del ángulo formado por la recta y el eje x.



Convencionalmente la pendiente de una recta se denota con la letra «m» minúscula.
En la figura:

- Sea m la pendiente de la recta L.

  Luego: $m = \tan\alpha$

  Si α < 90º; entonces m es positiva.

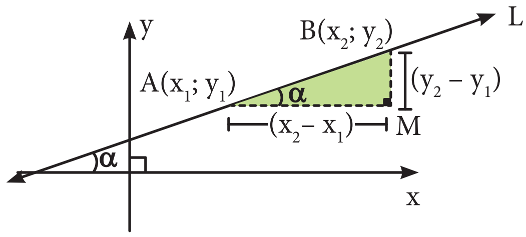
- Sea: m_1 la pendiente de la recta L_1.

  Luego: $m_1 = \tan\beta$

  Si β > 90º; entonces m_1 es negativa.

Cálculo de la pendiente

La pendiente de una recta puede ser calculada conociendo las coordenadas de dos puntos de dicha recta.

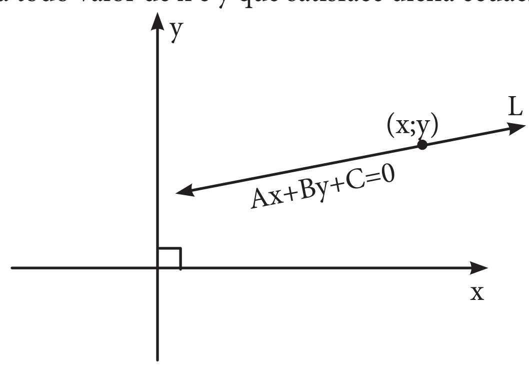


En la figura:
Sea la recta L cuya pendiente es m.
Luego: $m = \tan\alpha$
En el ⊿AMB: $\tan\alpha = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

Entonces: $m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

Forma de la ecuación general de la recta

Toda ecuación lineal de la forma Ax + By + C = 0, se denomina ecuación lineal en variables x e y o de primer grado donde (x; y) pertenece a dicha recta. Esto es la ecuación general de una recta, se cumple pata todo valor de x e y que satisface dicha ecuación.



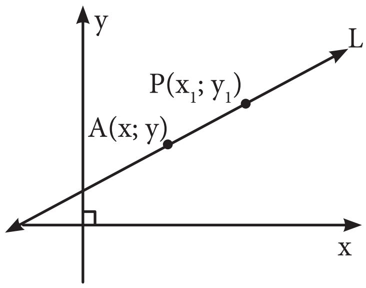
Del gráfico: $\overleftrightarrow{L} : Ax + By + C = 0$ Ecuación general

donde: A, B y C son constantes, siendo m su pendiente.

$\Rightarrow \quad m = -\dfrac{A}{B}$

Forma de la ecuación de una recta dado un punto y su pendiente

La ecuación de una recta que pasa por un punto $P(x_1; y_1)$ y tiene una pendiente m es: $y - y_1 = m(x - x_1)$.



Sea $A(x; y) \in \overleftrightarrow{L}$, luego por cálculo de la pendiente

$$\overleftrightarrow{L}: m = \frac{y_1 - y}{x_1 - x} = \frac{y - y_1}{x - x_1}$$

Luego:

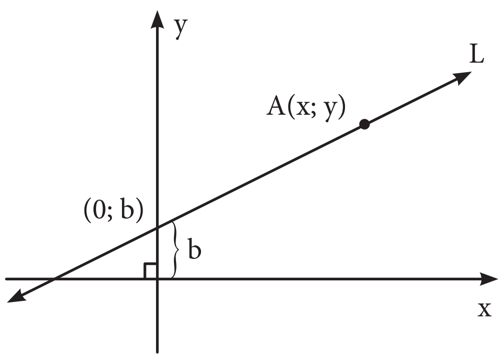
$\boxed{\overleftrightarrow{L}: y - y_1 = m(x - x_1)}$ **Ecuación punto pendiente**

Donde:

$P(x_1; y_1)$: punto de paso
$A(x; y)$: punto genérico
m : pendiente

Forma de la ecuación de una recta dado su pendiente y su ordenada al origen

La ecuaciónde la recta que pasa por (0;b) y tiene una pendiente m es: $y = mx + b$.



Por la ecuación punto-pendiente

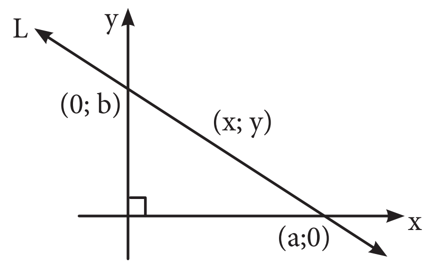
$\overleftrightarrow{L}: y - b = m(x - 0)$

$\overleftrightarrow{L}: \boxed{y = mx + b}$ ecuación y –intercepto o ecuación de pendiente y ordenada al origen.

m : pendiente de la recta $\overleftrightarrow{L}$

Forma de la ecuación de una recta de coordenada al origen

La ecuación de la recta que pasa por (0; b) y (a; 0) es: $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$.



En la figura:

$$\overleftrightarrow{L}: m = \frac{0 - b}{a - 0} \Rightarrow m = -\frac{b}{a}$$

Aplicando la ecuación de pendiente y ordenada al origen.

$\overleftrightarrow{L}: y = mx + b$ ... (1)

Reemplazando m en (1)

$\overleftrightarrow{L}: y = -\frac{b}{a}x + b.$

Luego:

$\overleftrightarrow{L}: \boxed{\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1}$ ecuación de coordenadas al origen

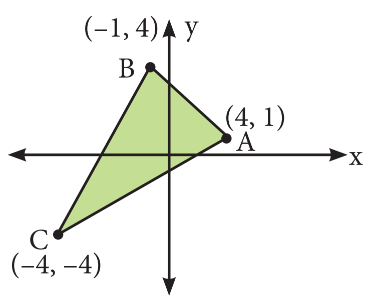
Trabajando en clase

Integral

1. Dado los puntos A(4, –3) y B(–6; –2), calcula la distancia entre los puntos.

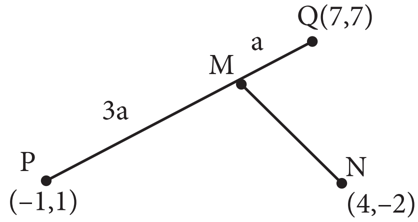
2. Dado los puntos A(4, –6) y B(3, –3), calcula la suma de las coordenadas del punto medio de $\overline{AB}$.

3. Calcula el área de la región triangular mostrada.



Católica

4. Del gráfico, calcula «MN».



Resolución:

Calculamos el punto «M»:

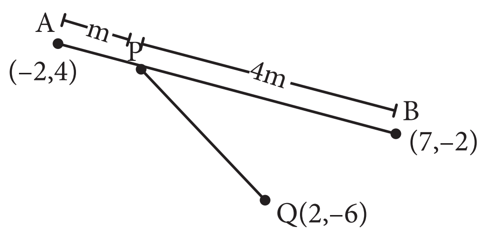
$$x_M = \frac{7 \times 3 + (-1)(1)}{4} = 5$$

$$y_M = \frac{7 \times 3 + (1)(1)}{4} = \frac{11}{2} \qquad \Rightarrow M(5, 11/2)$$

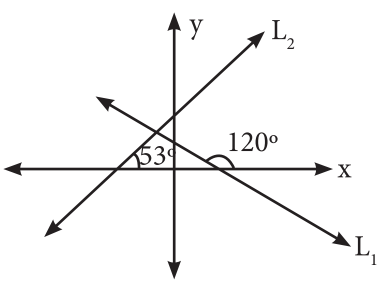
Calculamos la distancia entre 2 puntos

$$MN = \sqrt{(5-4)^2 + (11/2-(-2))^2} = \frac{\sqrt{229}}{2}$$

5. Del gráfico, calcula «PQ».



6. Calcula la suma de las pendientes de $\overleftrightarrow{L_1}$ y $\overleftrightarrow{L_2}$.



7. Si los puntos A(4, 2) y B(–7, 3) pertenecen a la recta $\overleftrightarrow{L_1}$ y los puntos P(7, –4) y Q(1, –7) pertenecen a la recta $\overleftrightarrow{L_2}$, calcula la suma de las pendientes de $\overleftrightarrow{L_1}$ y $\overleftrightarrow{L_2}$.

UNMSM

8. Si se tienen los puntos A(4, –8) y B(7, 3); determina la ecuación de la recta que pasa por A y B.

Resolución:

Calculamos la pendiente: $m = \frac{-8-3}{4-7} = \frac{11}{3}$

Igualamos con los generales: $\frac{11}{3} = \frac{y-3}{x-7}$

(escogemos cualquiera de los 2 puntos de dato)

Multiplicamos en aspa: $11x - 77 = 3y - 9$

y acomodamos $11x - 3y - 68 = 0$

9. Si se tienen los puntos A(3, 4) y B(–3, 8); determina la ecuación de la recta que pasa por A y B.

10. Se tiene la recta $\overleftrightarrow{L}$ cuyo ángulo de inclinación es 53° y pasa por el punto (3, –2); determina la ecuación de la recta $\overleftrightarrow{L}$.

11. Grafica la recta $7x + 8y - 13 = 0$.

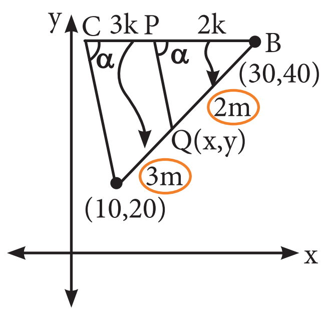
UNI

12. En un triángulo ABC, donde A(10, 20) y B(30, 40), se ubican los puntos «P» y «Q» en $\overline{BC}$ y $\overline{AB}$ respectivamente, tal que 2(CP) = 3(PB) y m∢BCA = m∢BPQ. Calcula las coordenadas de «Q».

Resolución:

Graficamos adecuadamente:

Por división de un segmento tenemos:



$$x = \frac{2(10) + 3(30)}{3+2} = 22$$

$$y = \frac{2(20) + 3(40)}{3+2} = 32$$

$\therefore$ Q(22, 32)

13. En un triángulo ABC, donde A(5, 8)y B(16, 18), se ubican los puntos «P» y «Q» en $\overline{BC}$ y $\overline{AB}$ respectivamente, tal que CP = 4(PB) y m∢BCA = m∢BPQ. Calcula las coordenadas de «Q».

14. En la figura, si $\frac{OH}{HC} = k$ y AO = n; calcula la coordenada en el punto «D».