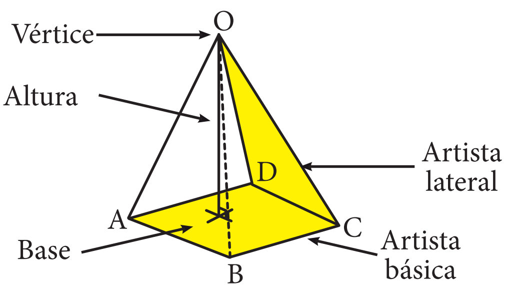
PIRÁMIDE, CONO Y ESFERA

PIRÁMIDE

Es un sólido limitado por una región poligonal llamada base, y en su parte lateral está limitada por regiones triangulares consecutivas que tienen un vértice común, el cual a su vez es el vértice de la pirámide.

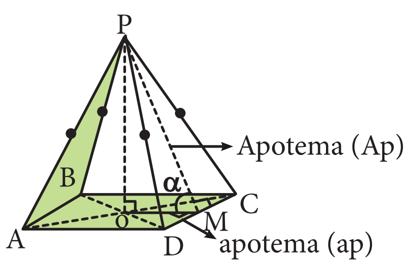
En toda pirámide, la perpendicular trazada desde su vértice al plano de la base se le denomina altura de la pirámide.

Notación: Pirámide O – ABCD.



Pirámide regular

Una pirámide es regular si sus aristas laterales son congruentes y su base es un polígono regular. En toda pirámide regular, el pie de su altura coincide con el centro de su base, y la perpendicular trazada desde su vértice a cualquiera de las aristas básicas se denomina apotema. En la figura se muestra una pirámide regular: P – ABCD.



P – ABCD

- Ap: apotema de la pirámide (PM)
- ap: apotema del polígono regular ABCD (OM)
- $\overline{PO}$: altura de la pirámide; «O» es el pie de dicha altura y centro del polígono regular.
- α: la medida del diedro formado por una cara lateral con la base.

En toda la pirámide, se cumple:

Área de la superficie latral (A_{SL}):

$$\boxed{A_{SL} = \begin{pmatrix}\text{Semiperímetro}\\ \text{de la base}\end{pmatrix} \bullet \text{Apotema}}$$

Nota: ΔPOM

$(Ap)^2 = (ap)^2 + (OP)^2$

Área de la superficie total (A_{ST}):

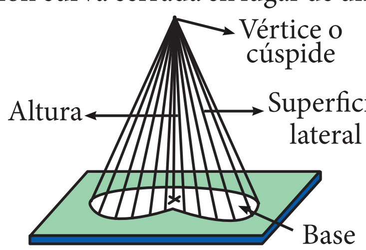
$$\boxed{A_{ST} = A_{SL} + \text{área de la base}}$$

Volumen (V):

$$\boxed{V = \frac{(\text{Área de la base})\bullet\text{altura}}{3}}$$

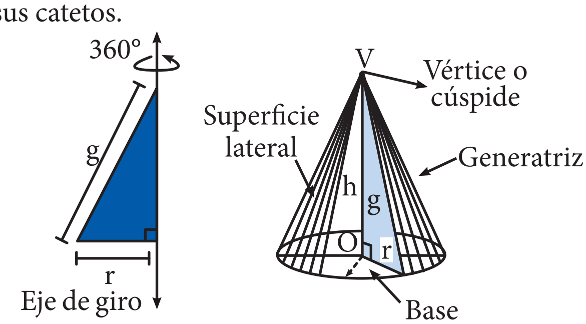
CONO

El estudio sistemático de las pirámides y el conocimiento de la circunferencia y algunas otras líneas curvas, han conllevado a la obtención y subsiguiente estudio de otras figuras, entre las cuales destaca el cono, el cual es muy parecido a una pirámide, con la diferencia de que su base es una región curva cerrada en lugar de una poligonal.



Cono de revolución o cono circular recto

Es aquel sólido geométrico generado por una región triangular rectangular al girar 360° en torno a uno de sus catetos.



Nota:
En un cono recto siempre se cumple: $h^2 + r^2 = g^2$.

Área de la superficie lateral (A_{SL}):

$$\boxed{A_{SL} = \pi rg}$$

Área de la superficie total (A_{ST}):

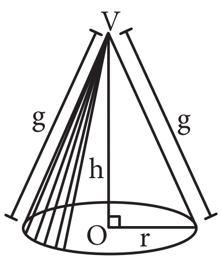
$$\boxed{A_{SL} = A_{SL} + \pi r^2}$$

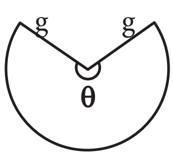
Volumen (V):

$$\boxed{V = \frac{(\pi r^2)\bullet h}{3}}$$

Desarrollo de la superficie lateral del cono

El desarrollo de la superficie lateral del cono es un sector circular cuyo radio es la generatriz del cono y su superficie es equivalente a la superficie lateral del cono.

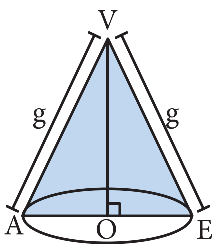




$$\boxed{\frac{\theta}{360°} = \frac{R}{g}}$$

Sección axial de un cono circular recto

La sección axial de un cono circular recto es un triángulo isósceles, cuyos lados congruentes son dos generatrices diametralmente opuestos ya que su base es el diámetro de la base del cono y su vértice.



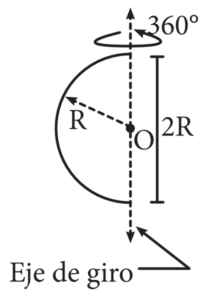
$$\boxed{S_{AVE} = r\bullet H}$$

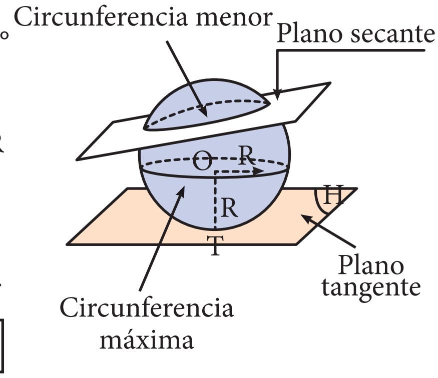
En la figura, ΔAVE es la sección axial del cono mostrado.

Nota:
Si el triángulo de la figura es equilátero, entonces el cono se llama equilátero.

Superficie esférica

Es aquella superficie generada por una semicircunferencia al girar 360° en torno a su diámetro.





$$\boxed{A_{SE} = 4\pi R^2}$$

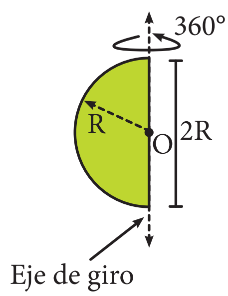
A_{SE}: Área de la superficie esférica.

Nota: Si el plano H es tangente a la superficie esférica.

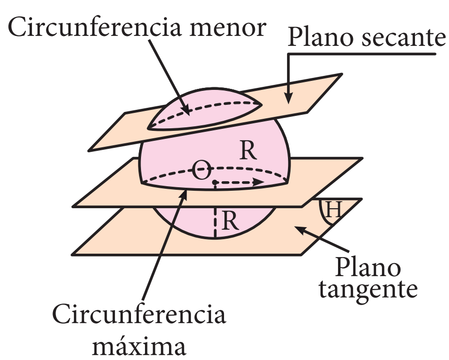
$$\boxed{\overline{OT} \perp H}$$

ESFERA

Es aquel sólido generado por un semicírculo al girar 360°, en torno a su diámetro.



$$\boxed{V_E = \frac{4}{3}\pi R^3}$$

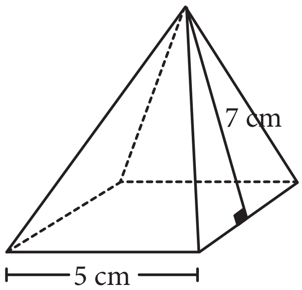


V_E: Volumen de la esfera.

Trabajando en clase

Integral

1. Calcula el área de la superficie lateral de la pirámide regular.



2. Se tiene un cono circular recto cuyo radio mide 8 m^2 y su generatriz 10 m. Calcula el área de la superficie lateral.

3. Calcula el volúmen de un esfera cuyo radio es igual a $\sqrt[3]{3}$ cm.

PUCP

4. El área de la superficie total de un cono de revolución es 200 πu^2, el producto de las longitudes de su generatríz y el radio de su base es 136 m^2. Calcula el volúmen de dicho cono.

Resolución:

Piden: $V = \dfrac{\pi R^2 H}{3}$ ... (1)

Datos:

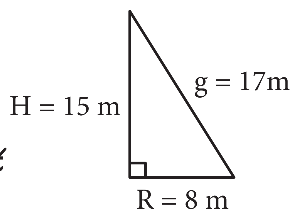
- ❖ $g.R = 136 \text{ m}^2$
- ❖ $A_{ST} = 200\pi \text{ m}^2$

$\underbrace{\pi Rg}_{\downarrow} + \pi R^2 = 200\pi$

$136\cancel{\pi} + \cancel{\pi}R^2 = 200\cancel{\pi}$

$R = 8$ m

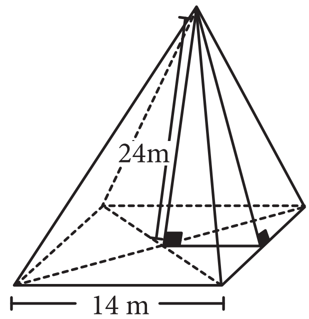
$\Rightarrow g = 17$ m



En (1): $V = \dfrac{\pi 8^2.15}{3} = 320\pi \text{ m}^3$

5. El áera de la superficie total de un cono de revolución es 144π cm^2, el producto de las longitudes de su generatríz y el radio de su base es 80 cm^2, calcula el volúmen de dicho cono.

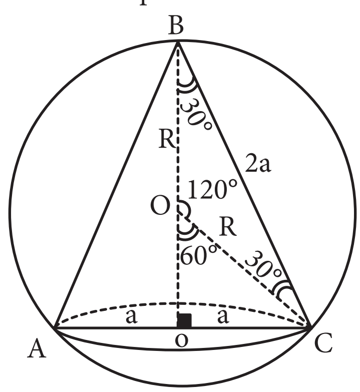
6. Calcula el área de la superficie total de la pirámide cuadrangular regular.



7. Calcula el área de la superficie de una esfera si el área de su círculo máximo es 100π u^2.

UNMSM

8. Se inscribe un cono recto de revolucióin en una esfera, tal que la generatríz del cono y el diámetro de su base tengan una medida igual a «2a» u, calcula el área de la superficie total de la esfera.



De la figura en el $\llcorner$ΔBOC:

$2a = R\sqrt{3}$

$R = \dfrac{2a}{\sqrt{3}}$

Se pide:

$A_{ST} = 4\pi R^2$

$A_{ST} = 4\pi\left(\dfrac{2a}{\sqrt{3}}\right)^2$

Entonces:

$A_{ST} = \left(\dfrac{16\pi}{3}\right) a^2 \text{ u}^2$

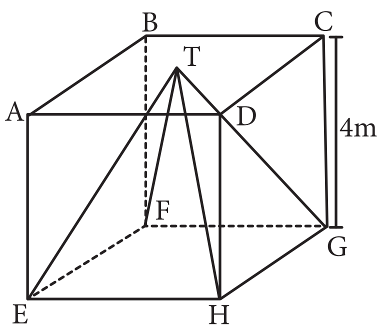
9. Se inscribe un cono recto de revolución en una esfera, tal que la generatriz del cono y el diámetro de su base tengan una medida igual a $3\sqrt{3}$ m. Calcula el área de la superficie total de la esfera.

10. Calcula el volúmen de un cono equilátero, cuya altura mide 6 m.

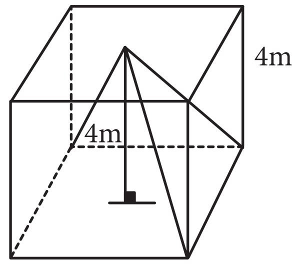
11. Calcula el apotema de una pirámide cuadrangular regular de 384 cm^3 de volumen y cuya altura mide 8 cm.

UNI

12. En el cubo mostrado «T» es el centro de la cara «ABCD», calcula el volúmen de la pirámide T–EFGH.



Resolución:



$$V = \frac{B \bullet H}{3} \Rightarrow V = \frac{16 \bullet 4}{3} \Rightarrow V = \frac{64}{3}\ m^3$$

13. En la generatríz se ubica un punto «P» tal que las distancias al vértice, a la altura y a la base son 5 m, 3 m y 8 m; respectivamente. Calcula el volúmen del cono de revolución.

14. El volúmen del cono menor es igual a 48 m^3, calcula el volúmen del cono mayor si las regiones R_1 y R_2 son paralelas.