OPERACIONES CON MATRICES

Operaciones con matrices

1. Adición de matrices

Dada las matrices $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ y $B = [b_{ij}]_{m\times n}$
Definimos:
$A + B = [a_{ij} + b_{ij}]_{m\times n}$

Ejemplo

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 7 & 2 \\ 6 & 3 & 1 \end{bmatrix};\ B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 5 & 6 & -8 \end{bmatrix}$$

Entonces

$$A + B = \begin{bmatrix} 5+2 & 7-1 & 2+3 \\ 6+5 & 3+6 & 1-8 \end{bmatrix}$$

$$A + B = \begin{bmatrix} 7 & 6 & 5 \\ 11 & 9 & -7 \end{bmatrix}$$

2. Multiplicación de un escalar por una matriz

Cuando una matriz es multiplicado por un escalar, cada elemento de la matriz queda multiplicado por dicho escalar.

Ejemplo

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \to 5A = \begin{bmatrix} 5.3 & 5.4 \\ 5.1 & 5(-2) \end{bmatrix}$$

$$\to 5A = \begin{bmatrix} 15 & 20 \\ 5 & -10 \end{bmatrix}$$

3. Multiplicación de una matriz fila por una matriz columna

Sean las matrices

$$A = [a_1 \quad a_2 \ldots\ldots a_n]_{1\times n};\ B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}_{n\times 1}$$

Definimos la matriz
$AB = [a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n]_{1\times 1}$

Ejemplo

$$A = [2 \quad 5 \quad -1] \text{ y } B = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 8 \end{bmatrix}$$

$$AB = [2.3 + 5.4 + (-1).8] = [18]_{1\times 1}$$

4. Multiplicación de dos matrices

Dadas las matrices
$A = [a_{ij}]_{m\times n}$ y $B = [b_{jk}]_{n\times p}$

Definimos la matriz producto $C = [C_{ik}]_{m\times p}$ tal que $C = AB$, en la que Cik es el producto de multiplicar la fila i de la primera matriz por la columna k de la segunda matriz.
Es decir:

$$\boxed{AB = [C_{ik}]_{m\times p} \text{ donde } C_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk}}$$

Observación

Para poder multiplicar A por B, el número de columnas de A debe ser igual al número de filas de B.
Ejemplo
Dadas las matrices

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}_{2\times 2} \quad \text{y} \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 5 & -3 \\ 1 & 7 & 4 \end{bmatrix}_{2\times 3}$$

A es de orden 2×2 y B es de orden 2×3

Entonces existe AB; además AB va a ser una matriz de orden 2×3. Es decir:

$$AB = C = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{15} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \end{bmatrix}_{2\times 3}$$

Hallemos cada elemento C_{ik}:

$$C_{11} = (3 \quad 4)\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = 3.3 + 4.1 = 13$$

$$C_{12} = (3 \quad 4)\begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix} = 3.5 + 4.7 = 43$$

$$C_{13} = (3 \quad 4)\begin{pmatrix}-3\\4\end{pmatrix} = 3.(-3) + 4.4 = 7$$

$$C_{21} = (2 \quad 1)\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix} = 2.3 + 1.1 = 7$$

$$C_{22} = (2 \quad 1)\begin{pmatrix}5\\7\end{pmatrix} = 2(5) + 1.7 = 17$$

$$C_{23} = (2 \quad 1)\begin{pmatrix}-3\\4\end{pmatrix} = 2(-3) + 1.4 = -2$$

$$\therefore\ AB = \begin{bmatrix}13 & 43 & 7\\ 7 & 17 & -2\end{bmatrix}_{2\times 3}$$

Determinantes

El determinante es una función que aplicada a una matriz cuadrada la transforma a un número real o complejo.

Notación

$$\boxed{|A| \text{ o } \det(A)}$$

Cálculo de determinantes

- De orden 1

  Si $A = a_{11} \rightarrow |A| = a_{11}$

  Ejemplo:

  Si $A = (5) \rightarrow |A| = 5$

  Si $B = (-3) \rightarrow |B| = -3$

- De orden 2

  Sea $A = \begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}$, entonces

  $|A| = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$

  Ejemplo:

  Si $A = \begin{pmatrix}3 & 2\\ 1 & 4\end{pmatrix}$; entonces $|A| = 3.4 - 1.2 = 10$

  Si $B = \begin{pmatrix}5 & -3\\ 2 & 0\end{pmatrix}$; entonces $\det(B) = 5.0 - 2(-3) = 6$

- De orden 3

  Si $A = \begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{pmatrix}$; aplicaremos la regla de Sarrus para hallar su determinante

Regla de Sarrus

$$|A| = \left[\begin{array}{ccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32}\end{array}\right]$$

$-$

$+$

Ejemplo

Halla el determinante de la matriz

$$A = \begin{pmatrix}2 & 2 & 3\\ 1 & -1 & 0\\ -1 & 2 & 1\end{pmatrix}$$

Resolución: Aplicaremos la regla de Sarrus

$$\left[\begin{array}{ccc|cc} 2 & 2 & 3 & 2 & 2\\ 1 & -1 & 0 & 1 & -1\\ -1 & 2 & 1 & -1 & 2\end{array}\right]$$

$-$

$+$

$$|A| = (-2 + 0 + 6) - (3 + 0 + 2) = -1$$

Trabajando en clase

Integral

1. Si $M = \begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 2\\ 4 & -3\end{pmatrix} \wedge N = \begin{pmatrix}2 & 3\\ -1 & 0\\ 2 & -5\end{pmatrix}$

Calcula «M + N» y «M − N».

2. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 5\end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix}-2 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}$

Calcula «3A + 2B»

3. Si $\begin{pmatrix}3 & 1\\ -5 & -1\end{pmatrix}$, calcula «2A + 3I»

PUCP

4. Sean las matrices:

$$A = \begin{pmatrix}2 & 3 & -1\\ -3 & 7 & -5\\ 0 & -2 & 6\end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix}6 & 4 & 12\\ 0 & 2 & -2\\ 10 & 14 & 0\end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \\ 7 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

Además: $A + x - \frac{1}{2}B = 3C$

Calcula el valor de Traz(x)

Resolución:

Despejamos «x» de la ecuación:

$A + x - \frac{1}{2}B = 3C$

$x = 3C + \frac{1}{2}B - A$

Además:

$$3C = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 0 \\ 9 & 0 & 6 \\ 21 & -6 & 12 \end{pmatrix} \wedge \frac{1}{2}B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & -1 \\ 5 & 7 & 0 \end{pmatrix}$$

Entonces

$$x = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 0 \\ 9 & 0 & 6 \\ 21 & -6 & 12 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & -1 \\ 5 & 7 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -3 & 7 & -5 \\ 0 & -2 & 6 \end{pmatrix}$$

$$x = \begin{pmatrix} 4 & -4 & 7 \\ 12 & -6 & 10 \\ 26 & 3 & 6 \end{pmatrix}$$

$\therefore$ Traz(x) = 4 – 6 + 6 = 4

5. Sean las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 \\ -1 & 3 & -5 \\ 0 & -2 & -3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 4 \\ 10 & 8 & 3 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -6 \\ 6 & -4 & -8 \\ 8 & -10 & 12 \end{pmatrix}$$

Además:

$x + A - 3B = \frac{1}{2}C$

Determina el valor de la Traz(x)

6. Sean $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$; $B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ y $\begin{cases} x + 2y = A \\ x - \ \ y = B \end{cases}$

Donde: $x \wedge y$ son matrices de orden 2 entonces «x» es:

UNI 1994-I

7. Sean las matrices $A = \begin{bmatrix} x - 3y & x \\ 1 & y \end{bmatrix}$; $B = \begin{bmatrix} 2 & 6 - y \\ 1 & 6 - x \end{bmatrix}$

y $C = \begin{bmatrix} -4 & -8 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$

Además A = B. Calcula A + 2C.

UNI 1994-II

UNMSM

8. Si $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

Calcula: AB + BA

Resolución:

- $AB = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$
- $BA = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow AB + BA = \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$

9. Sean: $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Calcula AB + BA

10. Sean: $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} a & 1 \\ c & 5 \end{pmatrix}$

tal que AB = BA

Calcula el valor de «a + c»

UNI 2004

11. Sean las matrices

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & b \\ b & c \end{pmatrix}$

si se cumple que A + B = I; donde I es $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Calcula el valor de «a + b + 2c»

UNI

12. Si $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

Calcula el valor de $|A| + |B|$

Resolución:

❖ $|A| = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 5 & -3 \end{vmatrix} \Rightarrow |A| = 2(-3) - 4(5)$

$|A| = -26$

❖ $|B| = \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} \Rightarrow |B| = 4(2) - 5(-1)$

$|B| = 13$

$\therefore |A| + |B| = -13$

13. Si $A = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 7 & -3 \end{pmatrix}$

Calcula el valor de $|A|$ y $|B|$

14. Si $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 5 \\ 3 & 1 & 6 \end{pmatrix}$

Calcula el valor de $|A|$ y $|B|$