NÚMEROS COMPLEJOS

CANTIDADES IMAGINARIAS

Son aquellos números que resultan de extraer una raíz de índice par a un número real negativo.

Ejemplos: $\sqrt{-3}; \sqrt[4]{-17}; \sqrt[8]{-512}$

Unidad imaginaria

Es la cantidad imaginaria más importante: $\sqrt{-1}$

Notación:

$$\boxed{i = \sqrt{-1}}$$

Potencias de la unidad imaginaria

Estudiaremos el comportamiento de i^n, $n \in \mathbb{Z}^+$

$i^1 = i$	$i^5 = i$	$i^9 = i$
$i^2 = -1$	$i^6 = -1$	$i^{10} = -1$
$i^3 = -i$	$i^7 = -i$	$i^{11} = -i$
$i^4 = 1$	$i^8 = 1$	$i^{12} = 1$

Se observa que cada grupo de cuatro potencias de i, se repiten los mismos valores: i, –1, –i, 1.

Propiedades

En el desarrollo de las potencias de la unidad imaginaria, se nota:

$$i^4 = i^8 = i^{12} = \dots = i^{4n} = 1$$

Esto implica que la unidad imaginaria elevada a un múltiplo de cuatro es igual a la unidad.

$$\boxed{i^{4n} = 1; \forall\, n \in \mathbb{Z}}$$

Ejemplos:

$i^{100} = 1$ $\quad$ $i^{720} = 1$ $\quad$ $i^{123456} = 1$

Además:

$$\boxed{i^{4+k} = i^4 \,.\, i^k = i^k}$$

Ejemplos:

- $i^{41} = i^{4+1} = i^1 = i$
- $i^{98} = i^{4+2} = i^2 = -1$
- $i^{123} = i^{4+3} = i^3 = -i$
- i^{97531}, para números grandes se recomienda verificar si las dos últimas cifras de 97531 son múltiplos de 4, entonces:

$$i^{97531} = i^{31} = i^{4+3} = i^3 = -i$$

Teorema

$$\boxed{i^{-k} = (-1)^k \,.\, i^k;\ \forall\, n \in \mathbb{Z}}$$

Ejemplos:

- $i^{-33} = (-1)^{33}.\, i^{33} = -i^{33} = -i^{\overset{\circ}{4}+1} = -i^1 = -i$
- $i^{-50} = (-1)^{50} = i^{50} = i^2 = i^{\overset{\circ}{4}+2} = i^2 = -1$
- $i^{-20} = (-1)^{20} \,.\, i^{20} = i^{20} = i^{\overset{\circ}{4}} = 1$

Propiedades

I.

$$\boxed{i + i^2 + i^3 + i^4 = 0}$$

II.

$$\boxed{i + i^2 + i^3 + i^4 + \dots + i^{4n} = 0}$$

III.

$$\boxed{i^n + i^{n+1} + i^{n+2} + i^{n+3} = 0}$$

Ejemplos:

- $i + i^2 + i^3 + i^4 + \dots i^{2016} = 0$
- $i^{41} + i^{42} + i^{43} + i^{44} = 0$

Resultados notables

$$\boxed{(1+i)^2 = 2i} \qquad \boxed{(1-i)^2 = 2i}$$

$$\boxed{(1+i)^3 = -2(i-1)} \qquad \boxed{(1-i)^3 = -2(1+i)}$$

$$\boxed{(1+i)^4 = -4} \qquad \boxed{(1-i)^4 = -4}$$

$$\boxed{\frac{1+i}{1-i} = i} \qquad \boxed{\frac{1-i}{1+i} = -i}$$

$$\boxed{\frac{1}{i} = i^{-1} = -i}$$

Trabajando en clase

Integral

1. Calcula el valor de:

$$S=\sqrt{-8}\,.\sqrt{-2}+\sqrt{-11}\,.\sqrt{-11}-\sqrt{-169}\,.\sqrt{-1}$$

2. Calcula:

$$M=4i^{36}-7i^{1071}+2i^{22}-7i^{81}$$

3. Calcula el valor de:

$$A=\frac{i+i^2+i^3+...+i^{2015}}{2-i+i^2-i^3}$$

PUCP

4. Reduce:

$$Z=(1+i)^2-(1-i)^4-2\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{(k)}$$

Resolución:

Sabemos por los resultados notables que:

$$(1+i)^2=2i;(1+i)^4=-4\wedge\frac{1-i}{1+i}=-i$$

Entonces: $Z=(2i)-(-4)-2(-i)$

$$Z=2i+4+2i=4+4i=4(1+i)$$

5. Reduce:

$$Z=(1-i)^2-\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^4+3i^{2014}-(1+i)^4$$

6. Calcula:

$$M=\frac{1}{i}+\frac{1}{i^2}+\frac{1}{i^3}+\frac{1}{i^4}+...+\frac{1}{i^{19}}$$

7. Reduce:

$$N=\left[\left(\frac{1-i}{1+i}-\frac{1+i}{1-i}\right)^{\left(\frac{1+i}{1-i}-\frac{1-i}{1+i}\right)}\right]^i$$

UNMSM

8. El equivalente de:

$$\frac{\sqrt{-2^{13}\sqrt{i}}}{1+i}$$

Resolución:

Si:

$$i=i\,.\,1=i\,.\,i^{12}=i^{13}\Rightarrow\boxed{i=i^{13}}\wedge\boxed{-2i=(1-i)^2}$$

Reemplazando:

$$\frac{\sqrt{-2^{13}\sqrt{i}}}{1+i}=\frac{\sqrt{-2^{13}\sqrt{i^{13}}}}{1+i}=\frac{\sqrt{-2i}}{1+i}=\frac{\sqrt{(1-i)^2}}{1+i}=\frac{1-i}{1+i}=-i$$

9. Reduce:

$$Z=\frac{5\sqrt{2^5\sqrt{i}}}{1-i}$$

10. Si: $Z=1+i$

Calcula: $E=Z^4+\dfrac{1}{Z^4}$

(UNAML 2013 – I)

11. Si: $i^2=-1$, el número complejo

$$Z=\frac{i^{2003}-i}{1-i}$$

(UNAC 2011 – II)

UNI

12. Calcula:

$$E=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{i}{\sqrt{2}}\right)^{8k};K\in Z^+$$

Resolución:

$$E=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{i}{\sqrt{2}}\right)^{8k}=\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^{8k}=\left[\frac{(1-i)^2}{\sqrt{2}^2}\right]^{4k}$$

$$E=\left(\frac{-2i}{2}\right)^{4k}=(-i)^{4k}=(-1)^{4k}.i^{4k}=1.1=1$$

13. Si: $n=8k\wedge k\in Z^+$, calcule el valor de R:

$$R=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i\right)^n+\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i\right)^n$$

(UNI 2007–I)

14. Halla la suma A de número complejos

$$A=(1+i)+(2+u^2)+(3+i^3)+\ldots+(4n+i^{4n})$$

(UNI 2004 – I)