ALGEBRA — CUARTO

NOTACIÓN Y DETERMINACIÓN DE DETERMINANTES

DEFINICIÓN

El determinante es una función que aplicada a una matriz cuadrada, la transforma en un escalar.

NOTACIÓN

Sea A una matriz cuadrada, el determinante de la matriz A se representa por $|A|$ o $\det(A)$.

Sea $M_{n\times n}$ el conjunto de todas las matrices cuadradas de orden «n»; entonces la definición queda de la siguiente manera:

$$|\ |: M_{n\times n} \to \mathbb{R} \text{ o } \mathbb{C}$$
$$A \to |A|$$

1. Matriz de orden uno

Se llama determinante de una matriz de primer orden, formada por el elemento a_{11} al propio elemento a_{11}.

Ejemplos:

$A = (8) \Rightarrow |A| = 8$; $B = (-15) \Rightarrow |B| = -15$

2. Matriz de orden dos

Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ se define su determinante:

$$|A| = a_{11}\bullet a_{22} - a_{21}\bullet a_{12}$$

Ejemplo:

Sea $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ $\Rightarrow |A| = (2)(3) - (1)(4) = 2$

(1)(4) (2)(3)

Luego: $|A| = 2$

3. Matriz de orden tres

Regla de Sarrus

$$\text{Sea } A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Se trasladan las dos primeras columnas al final de la matriz y se hacen multiplicaciones en dirección a las diagonales como se indica:

$$\Rightarrow |A| = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow |A| = (a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}) - (a_{31}a_{22}a_{13} + a_{32}a_{23}a_{11} + a_{33}a_{21}a_{12})$$

Propiedades

1. $|A| = |A^T|$
2. $|A\bullet B| = |A|\bullet|B|$
3. Si una matriz cuadrada tiene los elementos de dos filas o dos columnas, respectivamente proporcionales, se obtendrá que su determinante es cero.
   Ejemplo:
   $A = \begin{pmatrix} a & ka \\ b & kb \end{pmatrix} \Rightarrow |A| = abk - abk = 0$
4. Si se intercambian dos filas o columnas consecutivas de una matriz cuadrada, su determinante solo cambia de signo.
   $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow |A| = 15 - 8 = 7$
   $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow |B| = 8 - 15 = -7$
5. Cuando una fila o columna se le suma una cierta cantidad de veces otra fila o columna las dos matrices obtenidas tienen igual determinante.
   Ejemplos:
   $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 6 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow |A| = 5 - 12 = -7$
   $B = \begin{pmatrix} 5 & 2+5k \\ 6 & 1+6k \end{pmatrix} \Rightarrow |B| = 5(1+6k) - 6(2+5k) = -7$
6. El determinante de una matriz escalar, triangular inferior o triangular superior es igual al producto de multiplicar los elementos de la diagonal principal.

Ejemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 8 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{pmatrix} \Rightarrow |A| \ \ 1 \bullet 5 \bullet 8 \bullet 10 = 400$$

7. El determinante de una matriz antisimétrica de orden impar es igual a cero.
Ejemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 5 \\ -1 & 0 & -4 \\ -5 & 4 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{ccccc} & & - & - & - \\ 0 & 1 & 5 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -4 & -1 & 0 \\ -5 & 4 & 0 & -5 & 4 \\ & & + & + & + \end{array}$$

$\Rightarrow |A| = 0 + 20 - 20 - (0 + 0 + 0)$
$\Rightarrow |A| = 0$

8. Sea A una matriz de orden «n», se cumple $|kA| = k^n\,|A|;\ k \in \mathbb{R}$

Ejemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow |A| = 6 - 4 = 2 \Rightarrow |A| = 2$$

$$B = 4a \Rightarrow B = \begin{pmatrix} 12 & 4 \\ 16 & 8 \end{pmatrix} = 96 - 64 = 32 \Rightarrow |B| = 32$$

$$\Rightarrow |B| = |4A| = 4^2|A| = 16 \bullet 2 = 32$$

Trabajando en clase

Integral

1. Calcula el determinante de $A = \begin{pmatrix} -3 & 6 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

2. Calcula «x» en $\begin{vmatrix} x & 2 \\ 18 & x \end{vmatrix} = 0$

3. Si $|A| = 3$, calcula el determinante de $A.A^T$.

Católica

4. Calcula: $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ -2 & 0 & 4 \\ 4 & 2 & -1 \end{vmatrix}$

Resolución:

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ -2 & 0 & 4 \\ 4 & 2 & -1 \end{vmatrix} = \begin{array}{ccccc} & & 0 & 8 & 6 \\ 1 & 3 & 5 & 1 & 3 \\ -2 & 0 & 4 & -2 & 0 \\ 4 & 2 & -1 & 4 & 2 \\ & & 0 & 48 & -20 \end{array}$$

$A = (0 + 48 - 20) - (0 + 8 + 6) = 28 - 14$
$\therefore\ A = 14$

5. Calcula:

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & -5 \\ 2 & 0 & 2 \\ -3 & 3 & 6 \end{vmatrix}$$

6. Calcula:

$$\begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}$$

7. Calcula

$$\begin{vmatrix} 0 & 5 & -7 \\ -5 & 0 & -2 \\ 7 & 2 & 0 \end{vmatrix}$$

UNMSM

8. Si A es una matriz cuadrada de orden tres cuyo determinante es 2, calcula $|8A|$.

Resolución
Como A es de orden 3 entonces:
$|8A| = 8^3|A| = 512(2) = 1024$
$\therefore\ |8A| = 1024$

9. Si A es una matriz de orden cuatro cuyo determinante es 3, calcula $|5A|$.

10. Resuelve:

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & x & 1 \\ 2x & 4 & -1 \end{vmatrix} = -10$$

11. Calcula:

$$\begin{vmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{vmatrix}$$

Si:

$$\begin{vmatrix} d & a & g \\ e & b & h \\ f & c & i \end{vmatrix} = 5$$

UNI

12. Calcula:

$$\begin{vmatrix} 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 8 & 8 & 6 & 4 & 2 \\ 9 & 9 & 9 & 6 & 3 \\ 8 & 8 & 8 & 8 & 4 \\ 5 & 5 & 5 & 5 & 5 \end{vmatrix}$$

Resolución:

Efectuando las siguientes transformaciones:

$C_1 - C_2$; $C_2 - C_3$; $C_3 - C_4$; $C_4 - C_5$, obtenemos:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{vmatrix}$$

$\Rightarrow$ Por ser una matriz triangular superior:

$1.2.3.4.5 = 120$

13. Calcula:

$$\begin{vmatrix} 11 & 10 & 9 & 8 & 7 \\ 14 & 14 & 12 & 10 & 8 \\ 15 & 15 & 15 & 12 & 9 \\ 14 & 14 & 14 & 14 & 10 \\ 11 & 11 & 11 & 11 & 11 \end{vmatrix}$$

14. Calcula:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$