MATRIZ INVERSA

Matriz singular y no singular

Sea «A» una matriz cuadrada. Definimos:

- Si $|A| = 0$, decimos que A es una matriz singular (no invertible)
- Si $|A| \neq 0$, decimos que A es una matriz no singular (invertible)

Matriz inversa

Sea A una matriz cuadrada *no singular,* si existe una única matriz B cuadrada del mismo orden tal que AB = BA = I, entonces definimos a B como la matriz inversa de A.

Notación

$$\boxed{B = A^{-1}}$$

Cálculo de la matriz inversa

a) De orden 1

Si $A = (a_{11}) \Rightarrow A^{-1} = \left(\dfrac{1}{a_{11}}\right)$

b) De orden 2

$$\text{Si } A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{|A|}\overbrace{\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}}^{\text{matriz adjunta}}$$

Ejemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow |A| = (4)(3) - (2)(1) = 10$$

$$\therefore A^{-1} = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/10 & -1/10 \\ -1/5 & 2/5 \end{pmatrix}$$

Operaciones elementales

Se llaman operaciones elementales por filas (o columnas) sobre una matriz:

- ❖ Al intercambio de dos filas (o columnas)
- ❖ A la multiplicación de una fila (o columna) por un escalar no nulo.
- ❖ A una fila (o columna) le sumamos el múltiplo de otra fila (o columna)

c) De orden n ≥ 3

Se aplica el «Método de Gauss - Jordan» donde a partir de la matriz ampliada (A : I) por medio de operaciones elementales por fila, se puede obtener la nueva matriz ampliada (I : B) y se concluye que $B = A^{-1}$.

$$(A \,\vdots\, I) \xrightarrow{\text{de fila}} (I : B)$$

Ejemplo: Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calcula A^{-1}

Obtenemos la matriz ampliada:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{c} \xrightarrow{f_2 + f_1(-2)} \\ \xrightarrow{f_3 + f_1(-1)} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{f_2 + f_3(-3)} \left(\begin{array}{c|c} \underbrace{\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}}_{I} & \underbrace{\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \end{matrix}}_{A^{-1}} \end{array}\right)$$

$$\therefore A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Teoremas

Sean A y B matrices cuadradas no singulares:

1. $(AB)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$
2. $(\lambda A)^{-1} = \dfrac{1}{\lambda} \cdot A^{-1}$
3. $(A^{-1})^{-1} = A$
4. $|A^{-1}| = \dfrac{1}{|A|}$

Trabajando en clase

Integral

1. Escribe verdadero (V) o falso (F) según corresponda:

a) $A = \begin{pmatrix} 3 & 12 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$, es singular. ( )

b) $B = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 5 & 15 \end{pmatrix}$, es no singular. ( )

c) $C = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 0 & -3 & 6 \\ 0 & 0 & -7 \end{pmatrix}$, es invertible. ( )

d) $D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 8 & 16 & 24 \end{pmatrix}$, es no invertible. ( )

2. Si $A = \begin{pmatrix} x-4 & x+2 \\ x-2 & x \end{pmatrix}$ es una matriz singular

Calcula «x».

3. Calcula el conjunto de valores que puede tomar «x», si la matriz.

$A = \begin{pmatrix} x+2 & x-1 \\ 2x & x \end{pmatrix}$ tiene inversa

PUCP

4. Calcula la matriz inversa de:

$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & -7 \end{pmatrix}$

Resolución:

Para el cálculo de la matriz inversa A^{-1}, necesitamos dos cosas:

- ❖ $|A| = 3(-7) - (4)(1) = -25$
- ❖ $\text{Adj}(A) = \begin{pmatrix} -7 & -1 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$

Entonces: $A^{-1} = \dfrac{\text{Adj}(A)}{|A|} = \dfrac{\begin{pmatrix} -7 & -1 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}}{-25}$

$\therefore A^{-1} = \begin{pmatrix} 7/25 & 1/25 \\ 4/25 & -3/25 \end{pmatrix}$

5. Calcula la inversa de:

$A = \begin{pmatrix} -4 & -3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$

6. Si: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \wedge B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

Calcula $B^{-1} \cdot A^{-1}$

7. Si: $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \wedge B = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}$

Calcula $A^{-1} \cdot B^{-1}$

UNMSM

8. Si $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \wedge B = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$

además $Ax = B$. Calcula la traza de «x»

Resolución:

Por propiedad (1) $A{\cdot}A^{-1} = I \vee A^{-1} \cdot A = I$

(2) $A{\cdot}I = A \vee I{\cdot}A = A$

En la ecuación matricial

$$Ax = B$$

Multiplicamos por A^{-1}

$\underbrace{A^{-1}\,A}x = A^{-1}B$

$\underbrace{Ix} = A^{-1}\cdot B$

$x = A^{-1} \cdot B$

Necesitamos A^{-1}, entonces:

$|A| = (2)(4) - (-1)(3) = 11$

$\text{Adj}(A) = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$

$A^{-1} = \dfrac{1}{11}\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$

Luego:

$x = A^{-1} \cdot B = \dfrac{1}{11}\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$

$x = \dfrac{1}{11}\begin{pmatrix} -7 & 7 \\ 19 & -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7/11 & 7/11 \\ 19/11 & -8/11 \end{pmatrix}$

$\therefore \text{Traz}(x) = \dfrac{-7}{11} + \left(\dfrac{-8}{11}\right) = \dfrac{-15}{11}$

9. Si $A=\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 0 & 3\end{pmatrix} \wedge B=\begin{pmatrix}-1 & -1\\ 2 & 1\end{pmatrix}$

Además Ax = B. Calcula la Traz(x)

10. Sean las matrices $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 3\end{pmatrix}$ y

$B=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$ tales que $AB=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

entonces, calcula el valor de «a + b + c + d».

UNI 2013-II

11. Si $A=\begin{pmatrix}2 & 5\\ -1 & 2\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}3 & 4\\ 2 & -1\end{pmatrix}$ $C=\begin{pmatrix}4 & 5\\ 1 & -1\end{pmatrix}$

Resuelve Ax + B = C

UNI

12. Calcula la inversa de $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$, utilizando el método de Gauss - Jordan.

Resolución:

$$\left[\begin{array}{cc:cc}1 & 2 & 1 & 0\\ 3 & 4 & 0 & 1\end{array}\right] \xrightarrow{f_2+f_1(-3)} \left[\begin{array}{cc:cc}1 & 2 & 1 & 0\\ 0 & -2 & -3 & 1\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{f_1+f_2} \left[\begin{array}{cc:cc}1 & 0 & -2 & 0\\ 0 & -2 & -3 & 1\end{array}\right] \xrightarrow{f_2\div(-2)} \left[\begin{array}{cc:cc}1 & 0 & -2 & 1\\ 0 & 1 & 3/2 & -1/2\end{array}\right]$$

$$\underbrace{\begin{matrix}-2 & 1\\ 3/2 & -1/2\end{matrix}}_{A^{-1}}$$

$$\therefore A^{-}=\begin{bmatrix}-2 & 1\\ 3/2 & -1/2\end{bmatrix}$$

13. Calcula la inversa de $A=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 4 & 2\end{pmatrix}$

utilizando el método de Gauss - Jordan

14. Calcula la matriz inversa de:

$$A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & 2 & 4\\ 5 & 1 & -2\end{pmatrix}$$

utilizando el método de Gauss - Jordan