Materiales Educativos GRATIS
ALGEBRA
CUARTO

MATRICES ESPECIALES

DEFINICIÓN DE MATRIZ

Una matriz es un arreglo rectangular de elementos distribuidos en filas y columnas.

Ejemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 5 & -3 \\ 1/2 & 3 & \sqrt{7} \end{pmatrix}_{\underset{\text{Filas}}{2}\times\underset{\text{Columnas}}{3}}$$

La matriz A tiene 2 filas y 3 columnas.

Forma general:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \cdots & & \cdots & \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mm} \end{bmatrix}$$

«m» filas

«n» columnas

$\underbrace{m \times n}$ orden de la matriz

- La matriz «A» tiene «m» filas y «n» columnas que abreviadamente se representa por:

  $$A = [a_{ij}]_{m\times n} \text{ o } A = (a_{ij})_{m\times n}$$

  Siendo: $i = 1; 2; 3; ...; m$

  $j = 1; 2; 3; ...; n$

- Además el orden de la matriz es «m×n».

CONSTRUCCIÓN DE UNA MATRIZ

Construir la matriz:

$$A = (a_{ij})_{2\times 3} \,/\, a_{ij} = 2i - j$$

Resolución:

Sea la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}_{2\times 3}$$

Según la regla $a_{ij} = 2i - j$, se cumple:

- $a_{11} = 2(1) - 1 = 1$
- $a_{12} = 2(1) - 2 = 0$
- $a_{13} = 2(1) - 3 = -1$
- $a_{21} = 2(2) - 1 = 3$
- $a_{22} = 2(2) - 2 = 2$
- $a_{23} = 2(2) - 3 = 1$

Luego tenemos:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}_{2\times 3}$$

MATRICES ESPECIALES

a) Matriz cuadrada

Es aquella matriz que tiene igual cantidad de filas y de columnas.

Ejemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & 4 & 6 \\ 0 & 1 & 8 \end{pmatrix}$$

Diagonal secundaria

Diagonal principal

- ❖ A la suma de elementos de la diagonal principal se le llama traza, y se denota por Traz.

  $$\text{Traz}(A) = 1 + 4 + 8 = 13$$

Tipos de matrices cuadradas

M. Diagonal

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}_{3\times 3}$$

M. Escalar

$$B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}_{3\times 3}$$

M. Identidad

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{3\times 3}$$

M. Triangular superior

$$B = \begin{pmatrix} 4 & -6 & 7 \\ 0 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & -8 \end{pmatrix}_{3\times 3}$$

nulos

M. Triangular inferior

nulos

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5 & 6 & 0 \\ -3 & -9 & 8 \end{pmatrix}_{3\times 3}$$

M. Simétrica

$$B = \begin{pmatrix} -9 & \pi & 2 \\ \pi & 6 & 5 \\ 2 & 5 & 7 \end{pmatrix}_{3\times 3}$$

iguales

M. Antisimétrica

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -3 & -6 \\ 3 & 0 & -8 \\ 6 & 8 & 0 \end{pmatrix}$$

signos opuestos

Elementos de la diagonal principal es cero.

b) Matriz rectangular

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}_{3\times2}$$

c) Matriz Nula

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{3\times2}$$

d) Matriz opuesta

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 3 & -8 \end{pmatrix} \Rightarrow -A = \begin{pmatrix} -5 & 1 \\ -3 & 8 \end{pmatrix}$$

Transpuesta de una matriz

Sea A una matriz entonces la transpuesta lo denotamos como A^T, que se genera intercambiando las filas por las columnas.
Ejemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}_{3\times2} \Rightarrow A^T = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 0 \\ 3 & 7 & 8 \end{pmatrix}_{2\times3}$$

Trabajando en clase

Integral

1. Construye la matriz:
$A = (a_{ij})_{3\times2} \,/\, a_{ij} = 2i + 3j$

2. Construye la matriz:
$$A = (a_{ij})_{3\times3} \Big/ a_{ij} = \begin{cases} i + j;\ i \geq j \\ i - j;\ i < j \end{cases}$$

3. Indica un ejemplo para cada una de las siguientes matrices:
a) Matriz cuadrada
b) Matriz rectangular
c) Matriz diagonal
d) Matriz escalar
e) Matriz identidad
f) Matriz triangular
g) Matriz simétrica
h) Matriz asimétrica
i) Matriz nula

Católica

4. Dada la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \\ -1 & 0 & \pi \\ 4 & -7 & -8 \end{pmatrix}_{3\times3}$$

Indica su matriz opuesta, matriz transpuesta y su traza.

Resolución:

- ❖ $OP(A) = -A = \begin{pmatrix} -3 & -2 & -5 \\ 1 & 0 & -\pi \\ -4 & 7 & 8 \end{pmatrix}_{3\times3}$
- ❖ $A^T = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 2 & 0 & -7 \\ 5 & \pi & -8 \end{pmatrix}_{3\times3}$
- ❖ $Traz(A) = a_{11} + a_{22} + a_{33} = 3 + 0 - 8 = -5$

5. Dada la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} \pi & -3 & 0 \\ -7 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & 4 \end{pmatrix}_{3\times3}$$

Indica su matriz opuesta, matriz transpuesta y su traza.

6. Sea la matriz:

$$B = (b_{ij})_{4\times4} \,/\, b_{ij} = 2i + j^2$$

Calcula Traz(B).

7. Sea la matriz:

$$A = (a_{ij})_{2\times2} \,/\, a_{ij} = 3i + j$$

Calcula Traz(A^T).

UNMSM

8. Calcula abc + xyz, en la siguiente matriz identidad:

$$A = \begin{pmatrix} a-3 & 0 & x-2 \\ 0 & b-5 & 0 \\ y-4 & z+3 & c+2 \end{pmatrix}$$

Resolución:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Luego: $a - 3 = b - 5 = c + 2 = 1$
$\Rightarrow a = 4;\ b = 6;\ c = -1$
Además: $x - 2 = y - 4 = z + 3 = 0$
$\Rightarrow a = 4;\ b = 6;\ c = -1$
$\therefore abc - xyz = -24 - (-24) = 0$

9. Calcula: abc + mnp, en la matriz identidad:

$$A = \begin{pmatrix} m-4 & 0 & a+3 \\ 0 & n+5 & 0 \\ b-4 & c+2 & p-2 \end{pmatrix}_{3\times3}$$

10. En la siguiente matriz triangular inferior

$$A = \begin{pmatrix} a-3 & b-2 & a-5 \\ 5 & b+8 & c-7 \\ 7 & 1 & c-3 \end{pmatrix}_{3\times 3}$$

Calcula Traz(A).

11. Calcula: a + b + c + x + y + z en la matriz antisimétrica.

$$A = \begin{pmatrix} a-3 & -2 & 3x-6 \\ b-4 & y-5 & c+3 \\ z+4 & c+1 & 2a \end{pmatrix}_{3\times 3}$$

UNI

12. Calcula el menor valor de x + y + z en la matriz escalar:

$$M = \begin{pmatrix} x^2+6 & y^2-4 \\ z^2-3z & 5x \end{pmatrix}_{2\times 2}$$

Resolución:

Por ser escalar:

$x^2 + 6 = 5x \Rightarrow x^2 - 5x + 6 = 0$

$(x - 2)(x - 3) = 0$

$x = 2 \vee x = 1$

Además:

$y^2 - 4 = 0 \wedge z^2 - 3z = 0$

$(y + 2)(y - 2) = 0 \wedge z(z - 3) = 0$

$y = -2 \vee y = 2 \wedge z = 0 \vee z = 3$

$\therefore \text{Min}(x + y + z) = 2 - 2 + 0 = 0$

13. Calcula el menor valor de a + b + c en la matriz escalar:

$$M = \begin{pmatrix} x^2+2 & z^2+5z \\ 2y^2-18 & 3x \end{pmatrix}_{2\times 2}$$

14. Calcula la traza de «A» sabiendo que es una matriz simétrica.

$$A = \begin{pmatrix} a & b+4 & 2a \\ 3b & b & c-6 \\ 8 & 8-c & c \end{pmatrix}_{3\times 3}$$