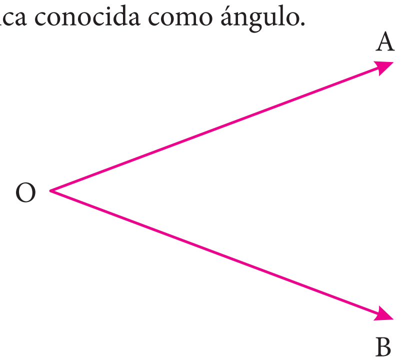
Materiales Educativos GRATIS

GEOMETRIA TERCERO

LOS ÁNGULOS

DEFINICIÓN

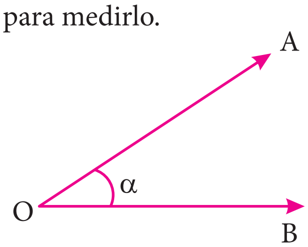
Cuando dos rayos se juntan, de manera que estos no formen una recta, entonces se ha formado la figura geométrica conocida como ángulo.

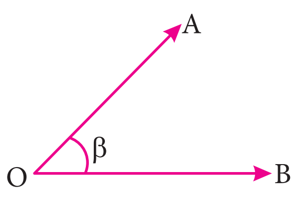


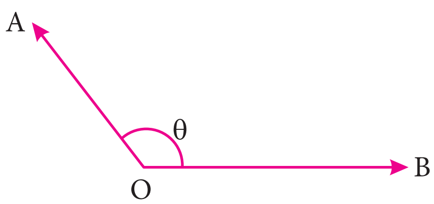
- **Notación:** $\angle AOB$
  Se lee: ángulo AOB.
- **Elementos:**
  O: Vértice del ángulo
  Rayos $\overline{OA}$ y $\overline{OB}$: Lados del ángulo

Rayos $\overrightarrow{OA}$ y $\overrightarrow{OB}$: Lados del ángulo

Los ángulos se pueden comparar entre sí, pero esta comparación es realizada respecto de la separación de sus lados (abertura del ángulo). Esta separación se mide teniendo en cuenta que mientras se separan los lados del ángulo, cualquier punto ubicado en uno de ellos describe un arco como el mostrado, lo que sugiere la forma de construir la regla (transportador) para medirlo.





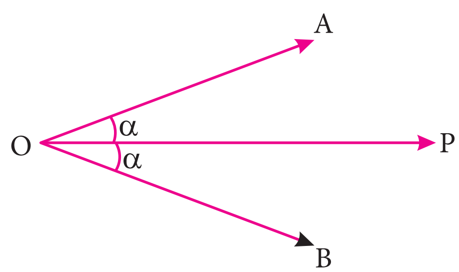


En el gráfico, las medidas de los ángulos se simbolizan como α, β y θ respectivamente.

- Notación: $m\angle AOB$
- Se lee: Medida del ángulo AOB.

Bisectriz de un ángulo

En todo ángulo, por su vértice se pueden trazar infinitos rayos, pero uno de ellos determina en el ángulo dos ángulos parciales de igual medida. A dicho rayo se le denomina bisectriz.



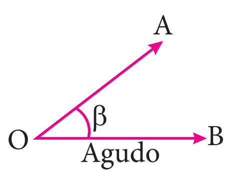
$\overrightarrow{OP}$: Bisectriz del ángulo AOB

$m\angle AOP = m\angle POB = \propto$

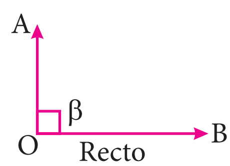
Clasificación de ángulos

A. Según su medida

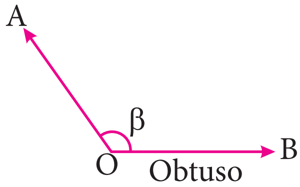
Atendiendo a los valores que puede tomar la medida de un ángulo, se clasifica en agudo, recto y obtuso.



Es aquel cuya medida es mayor que 0° y menor que 90°.
$0° < b < 90°$.



Es aquel cuya medida es igual a 90°
$b = 90°$



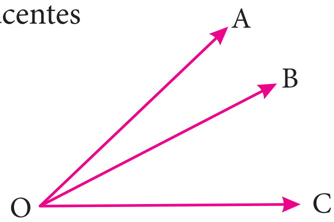
Es aquel cuya medida es mayor que 90° y menor que 180°.

$90^\circ < b < 180^\circ$

Según las posiciones relativas de sus lados

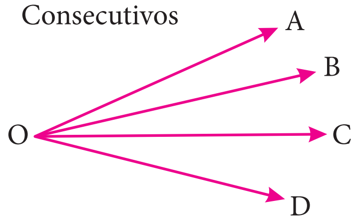
De acuerdo con su disposición en el plano, los ángulos se clasifican de la siguiente manera:

Adyacentes



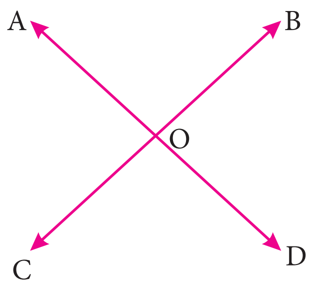
Son aquellos que tienen un lado común y están situados a distintos lados del lado común

Consecutivos



Son tres o más ángulos si cada uno de ellos es adyacente con su anterior.

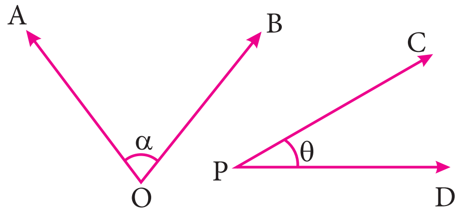
Opuestos por el vértice



Un ángulo se denomina opuesto por el vértice de otro si sus lados son las prolongaciones opuestas de

Ángulos complementarios

Se definen así a dos ángulos cuyas medidas suman 90°. De estos dos ángulos se dice que uno es el complemento del otro.



En la figura, el ángulo AOB y el ángulo CPD serán complementarios si se cumple lo siguiente:

$$\alpha + \theta = 90^\circ$$

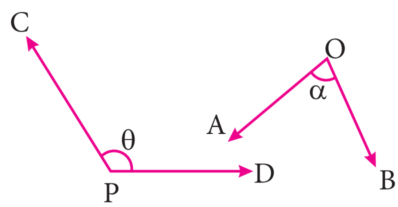
En ese caso: El complemento α es θ: $C_{(\alpha)} = \theta$

El complemento θ es α: $C_{(\theta)} = \alpha$

C: Se lee «complemento de».

Ángulos suplementarios

Se definen así a dos ángulos cuyas medidas suman 180°. De estos dos ángulos se dice, que uno es el suplemento del otro.



En la figura, el ángulo AOB y el ángulo CPD serán suplementarios: si se cumple lo siguiente:

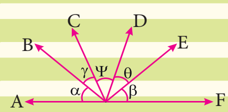
$$\alpha + \theta = 180^\circ.$$

En ese caso: El suplemento α es θ: $S_{(\alpha)} = \theta$

El suplemento θ es α: $S_{(\theta)} = \alpha$

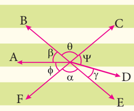
S: Se lee «suplemento de».

OBSERVACIÓN:



$\boxed{\alpha + \gamma + \Psi + \theta + \beta = 180^\circ}$

Cuando un conjunto de ángulos se agrupa de manera que están a un mismo lado de una recta, las medidas de todos ellos suman 180°.



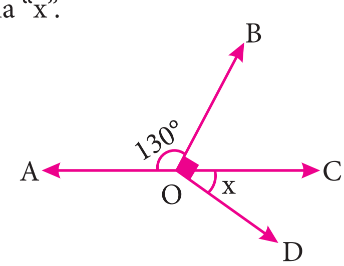
$\boxed{\alpha + \beta + \phi + \theta + \Psi + \gamma = 360^\circ}$

Cuando un conjunto de ángulos se agrupa de manera que están entorno a un punto, la suma de las medidas de todos ellos es 360°.

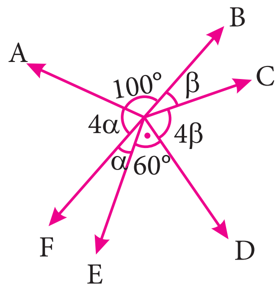
Trabajando en clase

Integral

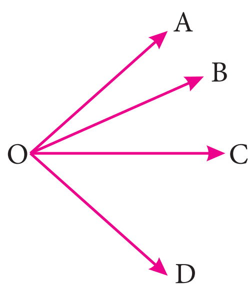
1. Calcula “x”.



2. Calcula “$\alpha + \beta$”.



3. Si $\overrightarrow{OB}$ y $\overrightarrow{OC}$ son bisectrices de los ángulos AOC y AOD, respectivamente,w calcula la $m\angle BOC$, si la $m\angle AOD = 80°$.



PUCP

4. Si la diferencia de dos ángulos suplementarios es 48°, calcula la medida del menor ángulo.

Resolución:

Sean “α” y “β” las medidas de los ángulos suplementarios.

Teoría $\rightarrow$ $\alpha + \beta = 180°$; $\alpha > \beta$

Además: $\alpha - \beta = 48°$

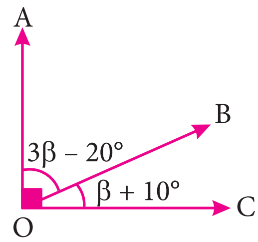
Piden “β”:

$$\begin{array}{l} \alpha + \beta = 180° \downarrow (-) \\ \alpha - \beta = 48° \\ \hline 2\beta = 132° \end{array}$$

$$\boxed{\therefore \beta = 66°}$$

5. Si la diferencia de dos ángulos suplementarios es 56°. Calcula la medida del menor de ellos.

6. Calcula “β”



7. Si los ángulos AOB y BOC son adyacentes tales que la $m\angle BOC = 4m\angle AOB = 50°$, calcula la $m\angle BOC$,

UNMSM

8. Se tienen tres ángulos consecutivos, $\angle AOB$, $\angle BOC$ y $\angle COA$.

“O”, tal que $\dfrac{m\angle AOB}{6} = \dfrac{m\angle BOC}{7} = \dfrac{m\angle COA}{11}$.

Calcula la $m\angle BOC$.

Resolución:

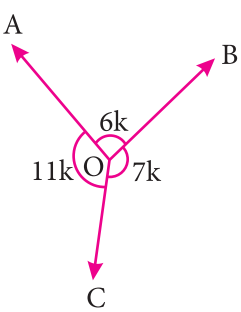
$$\frac{m\angle AOB}{6} = \frac{m\angle BOC}{7} = \frac{m\angle COA}{11} = k$$

$6k + 7k + 11k = 360°$

$k = 15°$

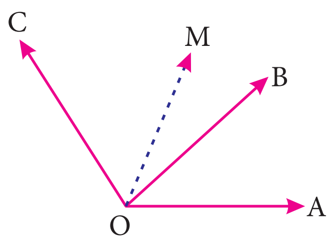
$$m\angle BOC = 7k = 7(15°)$$

$$\boxed{m\angle BOC = 105°}$$

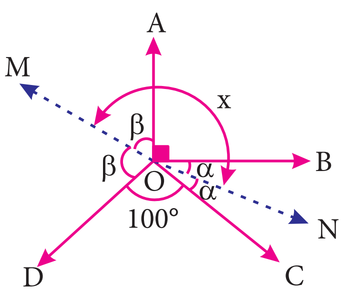


9. Se tienen tres ángulos consecutivos $\angle AOB$, $\angle BOC$ y COA alrededor de un punto "O", tal que $\dfrac{m\angle AOB}{8} = \dfrac{m\angle BOC}{9} = \dfrac{m\angle COA}{13}$.
Calcula la $m\angle AOB$.

10. Si $\overrightarrow{OM}$ es bisectriz del $\angle AOC$, calcula la $m\angle BOM$ si $m\angle BOC - m\angle AOB = 56°$

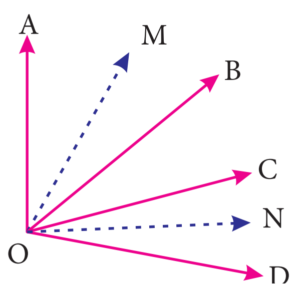


11. Calcula "x".



UNI

12. Se sabe que $\overrightarrow{OM}$ es bisectriz del $\angle AOB$ y $\overrightarrow{ON}$ es bisectriz del $\angle COD$; si $m\angle AOD = 104°$ y $4m\angle BOC = m\angle AOD$, calcula la $m\angle MON$.



Resolución

$m\angle AOD = 4m\angle BOC.$

$m\angle BOC = \dfrac{104°}{4}$

$m\angle BOC = 26°$

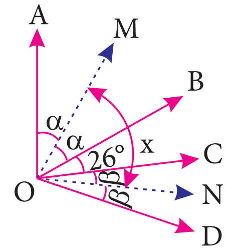
$m\angle AOD:$

$2\alpha + 2\beta + 26° = 104°$

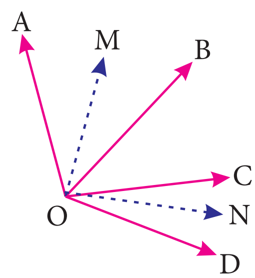
$\alpha + \beta = 39°$

$x = 26° + 39°$

$\boxed{x = 65°}$



13. Se sabe que $\overrightarrow{OM}$ es bisectriz del $\angle AOB$ y $\overrightarrow{ON}$ es bisectriz del $\angle COD$; si $m\angle AOD = 135°$ y $3m\angle BOC = m\angle AOD$, calcula la $m\angle MON$.



14. Si $\overrightarrow{OB}$ es bisectriz del $\angle AOC$, $7m\angle AOC = 4m\angle BOD$ y $m\angle AOD = 108°$, calcula la $m\angle COD$.