LOGARITMOS

Definición

Dados $b > 0$; $b \neq 1$ y $x > 0$. El logaritmo de «x» en base, denotado con $\log_b x$, es el número $y \in \mathbb{R}$, tal que $b^y = x$.

Simbólicamente $\boxed{\log_b x = y \Leftrightarrow b^y = x}$

Ejemplos:

- $\log_2 128 = 7 \Leftrightarrow 2^7 = 128$
- $\log_{\sqrt{3}} 9 = 4 \Leftrightarrow \sqrt{3}^{\,4} = 9$

  $\log_{3/4} \dfrac{16}{9} = -2 \Leftrightarrow \left(\dfrac{3}{4}\right)^{-2} = \dfrac{16}{9}$

Observaciones

- Cuando la base del logaritmo es $b = 10$, denotaremos $\log_{10} x = \log x$.
- Cuando la base del logaritmo sea el número trascendente $e = 2{,}718281\ldots$, denotaremos $\log_e x = \ln x$.

Identidad fundamental

$$b^{\log_b x} = x$$

Ejemplos:

- $3^{\log_3 5} = 5$
- $\pi^{\log_\pi 3} = 3$
- $10^{\log 7} = 7$

Propiedades de los logaritmos

Dados a, x y $\in \mathbb{R}^+$, $b > 0$, b, x, $y \neq 1$, se tiene:

I. $\boxed{\log_{b^n} x^m = \dfrac{m}{n} \log_y x}$

- ❖ $\log_{3^2} 5^7 = \dfrac{7}{2} \log_3 5$
- ❖ $\log_{2^7} 2^8 = \dfrac{8}{7} \log_2 2 = \dfrac{8}{7}$

$\operatorname{Log}_{6\sqrt{2}} \sqrt[3]{2} = \log_{2^{1/6}} 2^{1/3} = \dfrac{1/3}{1/6} \log_2 2 = 2$

II. $\boxed{\log_b(xy) = \log_b x + \log_b y}$

- ❖ $\log_6 9 + \log_6 4 = \log_6 36$
- ❖ $\log_3 35 = 36_3 5 + \log_3 7$
- ❖ $\log_5(2^3 \cdot 3) = \log_5 2^3 + \log_5 3 = 3\log_5 2 + \log_5 3$

III. $\boxed{\log_b\left(\dfrac{x}{y}\right) = \log_b x - \log_b y}$

- ❖ $\log_2 18 - \log_2 9 = \log_2\left(\dfrac{18}{9}\right) = \log_2{}^2 = 1$
- ❖ $\log_3 \dfrac{5}{2} = \log_3 5 - \log_3 2$
- ❖ $\log_2 \dfrac{3^7}{5} = \log_2 3^7 - \log_2 5 = 7\log_2 3 - \log_2 5$

IV. $\boxed{\log_b x \log_x y \log_y a = \log_b a}$

- ❖ $\log_3 4 \log_4 9 = \log_3 9 = 2$
- ❖ $\log_2 \pi \log_\pi \sqrt{7} \log_{\sqrt{7}} 64 = \log_2 64 = 6$

V. $\boxed{\log_b x = \dfrac{\log_a x}{\log_a b}}$

- ❖ $\log_7 3$ cambio a base 5, entonces $\log_7 3 = \dfrac{\log_5 3}{\log_5 7}$
- ❖ $\dfrac{\log_2 9}{\log_2 5} = \log_5 9$

Antilogaritmos $\boxed{\operatorname{Antilog}_b y = by}$

Ejemplos:

- $\operatorname{antilog}_3 5 = 3^5$
- $\operatorname{antilog}_{\sqrt[3]{7}} 6 = \sqrt[3]{7}^{\,6} = 7^2 = 49$

Cologaritmos $\boxed{\operatorname{colog}_b x = -\log_b x = \log_b \dfrac{1}{x}}$

Ejemplos:

- $\operatorname{colog}_2 6 = -\log_2 6$
- $\operatorname{colog}_5 \dfrac{1}{125} = \log_5 125 = 3$

Advertencia pre

- $\ln e = 1$
- $\ln e^n = n$
- $e^{\ln 3} = 3$
- $e^{\ln x} = x$

Trabajando en clase

Integral

1. Calcula:
$M = \log_5 625 - \log 1000 + \log_3 729$

2. Calcula:
$N = \log_4 8 - \log_{81} 27 + \log_{\sqrt{7}} 49$

3. Calcula: $F = 7^{\log_7 3} + 8^{\log_2 5} - 27^{\log_3 2}$

PUCP

4. Si $\log a = 3 \wedge \operatorname{Log} b = -2$, calcula el valor de $\log\left(\frac{\sqrt{b}}{a}\right)$

Resolución:

$\log\left(\frac{\sqrt{b}}{a}\right) = \log\sqrt{b} - \log a$

$\log\left(\frac{\sqrt{b}}{a}\right) = \log b^{1/2} - 3$

$\log\left(\frac{\sqrt{b}}{a}\right) = \frac{1}{2}\log b - 3$

$\log\left(\frac{\sqrt{b}}{a}\right) = \frac{1}{2}\cdot(-2) - 3 = -1 - 3 = -4$

5. Si $\log m = -2 \wedge \log n = 12$,

calcula el valor de $\log\left(\frac{\sqrt[4]{n}}{m}\right)$

6. Si $a_k = \frac{k+1}{k}$; $k = 1; 2; \ldots$

calcula:
$S = \log_b a_1 + \log_b a_2 + \log_b a_3 + \ldots + \log_b a_{99}$
donde: $b = 10^{4/7}$

7. Calcula el valor de «x».
$\log x = 2 + \frac{1}{2}(\log 18 + \log 8 - 2\log 25)$

UNMSM

8. Reduce:
$S = \frac{1}{1-\log_{xy} x} - \frac{1}{1-\log_{xy} x} + \log_x xy - 1$

Resolución:

❖ Calculemos el equivalente de las fracciones:

$\frac{1}{1-\log_{xy} x} = \frac{1}{\log_{xy} xy - \log_{xy} x} = \frac{1}{\log_{xy} y}$

Por propiedad: $\log_b a = \frac{1}{\log_a b}$

Entonces, tenemos:

$\frac{1}{1-\log_{xy} x} = \frac{1}{\log_{xy} y} = \log_y xy$

❖ De igual manera para la otra fracción:

$\frac{1}{1-\log_{xy} y} = \frac{1}{\log_{xy} x} = \log_x xy$

Reemplazemos lo obtenido en la expresión S.

$S = \log_y xy - \log_x xy + \log_x xy - 1$

$S = \log_y xy - 1 = \log_y xy - \log_y y$

$\therefore\ S = \log_y x$

9. Si p, q, r $\in \mathbb{R}^+$ y

$E = \frac{1}{\log_r(pq) + 1} + \frac{1}{\log_q(pr) + 1} + \frac{1}{\log_p(qr) + 1} + 1$

Calcula el valor de E:

UNMSM 2012-I

10. Si $x = \log_2(\log_4(\log_8 64))$,
calcula el valor de $3^{1+x} + 3^{1-x}$

UNMSM 2012-II

11. Si $\log_3 5 = x$, el valor de $\log_{45} 243$ es:

UNMSM 2001

UNI

12. Si $A = \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots}}}$ y $B = \sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{6+\ldots}}}$

Calcula: $\log_A(B + 5)$

Resolución:

Calculemos los valores de A y B

$A = \sqrt{2+\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots}}}_{A}}$; donde $A > 0$

$\Rightarrow\ A = \sqrt{2+A}$ elevando al cuadrado

$\Rightarrow\ A^2 = 2 + A$

$A^2 - A - 2 = 0$

$A \quad -2$

$A \quad +1$

$A = 2 \vee A = -1$, pero $A > 0$

$\Rightarrow A = 2$

Lo mismo haremos en B.

$B = \sqrt{6+\underbrace{\sqrt{6+\sqrt{6+\ldots}}}_{B}}$, donde $B > 0$

$\Rightarrow \; B^2 = (\sqrt{6+B})^2$

$\Rightarrow \; B^2 = 6 + B$

$B^2 - B - 6 = 0$

$B \quad -3$

$B \quad +2$

$B = 3 \vee B = -2$, pero $B > 0$

$\Rightarrow B = 3$

Luego: $\log_A(B + 5) = \log_2 8 = 3$

13. Si

$a = 1 + \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2\ldots}}}$

$b = 3 + \sqrt{6\sqrt{6\sqrt{6\ldots}}}$

calcula: $x = \log_b a$

UNI 1983-I

14. Si $10^x + 10^y = p$

$x - y = \log\left(\dfrac{p+q}{p-q}\right)$

Calcula: $10^x - 10^y$

UNI 1992