LEYES DE EXPONENTES

POTENCIACIÓN

$$\overset{\text{Exponente}}{\underset{\text{Base}}{5}^{2}} = \underset{\text{Potencia}}{25}$$

Exponente natural

$$\boxed{a^n = \underbrace{a \,.\, a \,.\, \ldots \,.\, a}_{\text{n veces}},\ n \in \mathbb{N} \wedge n \geq 2}$$

- $3^7 = \underbrace{3 \,.\, 3 \,.\, \ldots \,.\, 3}_{\text{7 veces}}$
- $(x^2)^5 = \underbrace{x^2 \,.\, x^2 \,.\, \ldots \,.\, x^2}_{\text{5 veces}}$
- $\underbrace{x^5 \,.\, x^5 \,.\, \ldots \,.\, x^5}_{\text{(2n–3) veces}} = (x^5)^{2n-3} = x^{10n-15}$
- $(-3)^4 = 81$ y $(-4)^3 = -64$

Observación: $(-)^{\text{PAR}} = (+)$
$(-)^{\text{IMPAR}} = (-)$

Exponente cero

$$\boxed{a^0 = 1;\ \forall\ a \neq 0}$$

- $468974^0 = 1$
- $(-7)^0 = 1$
- $-9^0 = -1$
- $(5^3 - 10^2 - 5^2)^0 = (125 - 100 - 25)^0 = 0^0$

Observación: "0^0 es indeterminado"

Exponente negativo

$$\boxed{a^{-n} = \frac{1}{a^n};\ a \neq 0}$$

- $3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$
- $\left(\frac{1}{5}\right)^{-3} = 5^3 = 125$
- $\left(\frac{2}{3}\right)^{-2} = \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$

Propiedades

1.

$$\boxed{a^m \,.\, a^n = a^{m+n}}$$

- $m^7 \,.\, m^5 \,.\, m^{-3} = m^{7+5-3} = m^9$
- $7^{2n-5} \,.\, 7^{n+6} = 7^{2n-5+n+6} = 7^{3n+1}$
- $2^{n+6} = 2^n \,.\, 2^6$

2.

$$\boxed{\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}}$$

- $\frac{m^{13}}{m^{-9}} = m^{13-(-9)} = m^{22}$
- $\frac{a^{-5}}{a^{-9}} = a^{-5+9} = a^4$
- $\frac{x^{2n+5}}{x^{2n-3}} = x^{5+3} = x^8$

3.

$$\boxed{(a^m)^n = a^{mn}}$$

- $(x^4)^9 = x^{36}$
- $(x^4)^{-3} = x^{-12}$
- $16^4 = (2^4)^4 = 2^{16}$
- $9^{n+5} = (3^2)^{n+5} = 3^{2n+10}$

- $3^{-5^2} \neq 3^{(-5)^2} \neq (3^{-5})^2$
  debido a que:
  $3^{-25} \neq 3^{25} \neq 3^{-10}$

4.

$$\boxed{(a.b)^n = a^n \,.\, b^n}$$

- $(x^2 \,.\, y^3)^6 = x^{12} \,.\, y^{18}$
- $3^x \,.\, 2^x = (2 \,.\, 3)^x = 6^x$

5.

$$\boxed{\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}}$$

- $\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{2^3}{5^3} = \frac{8}{125}$
- $\frac{72^x}{4^x} = \left(\frac{72}{4}\right)^x = 18^x$

RADICACIÓN

Índice ↑ raíz ↑

$$\sqrt[6]{64} = 2 \leftrightarrow 2^6 = 64$$

↓ Símbolo de raíz ↓ Radicando

Exponente fraccionario

$$\boxed{a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m}}$$

- $x^{5/2} = \sqrt{x^5}$
- $\sqrt[3]{n^7} = n^{7/3}$
- $a^{1/2} = \sqrt{a}\,;\; a^{1/3} = \sqrt[3]{a}$
- $8^{3^{-1}} = 8^{1/3} = 2$
- $2^{27^{3^{-1}}} = 2^{27^{\frac{1}{3}}} = 2^3 = 8$

Observación:

- $\sqrt[\text{PAR}]{(-)} = \text{NO EXISTE en } \mathbb{R}$
- $\sqrt[\text{IMPAR}]{(-)} = (-)$

Propiedad

1.

$$\boxed{\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m.n]{a}}$$

- $\sqrt{\sqrt[3]{\sqrt[4]{x^5}}} = \sqrt[2.3.4]{x^5} = \sqrt[24]{x^5}$
- $\sqrt{8} \,.\, \sqrt{2} = \sqrt{16} = 4$
- $\sqrt[x+3]{2^2} \,.\, \sqrt[x+3]{2^{x+1}} = \sqrt[x+3]{2^2 . 2^{x+1}}$
  $\sqrt[x+3]{2^{x+3}} = 2$

2.

$$\boxed{\sqrt[n]{a.b} = \sqrt[n]{a} \,.\, \sqrt[n]{b}}$$

- $\sqrt{8} = \sqrt{4.2} = \sqrt{4} \,.\, \sqrt{2} = 2\sqrt{2}$
- $\sqrt[3]{9} \,.\, \sqrt[3]{3} = \sqrt[3]{27} = 3$

3.

$$\boxed{\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}},\; b \neq 0}$$

- $\sqrt[3]{\frac{125}{27}} = \frac{\sqrt[3]{125}}{\sqrt[3]{27}} = \frac{5}{3}$
- $\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{8}{2}} = \sqrt{4} = 2$

4.

$$\boxed{\sqrt{x.\sqrt[3]{x^2.\sqrt{x}}} = \sqrt[2.3.2]{x^{11}} = \sqrt[12]{x^{11}}}$$

ECUACIÓN EXPONENCIAL

Teorema 1

$$\boxed{a^x = a^y \Leftrightarrow x = y,\; a > 0 \text{ y } a \neq 1}$$

- $3^{5x+3} = 27^{11} \Rightarrow 3^{5x+3} = (3^3)^{11}$
  $\Rightarrow 3^{5x+3} = 3^{33}$
  $\therefore x = 6$

Teorema 2

$$\boxed{\begin{gathered} a^x = b^x \Leftrightarrow x = 0, \\ a \neq b \wedge a.b \in \mathbb{R} - \{0;1\} \end{gathered}}$$

- $3^{x-2} = 11^{x-2} \Rightarrow x - 2 = 0$
  $\therefore x = 2$

Ecuaciones trascendentes

$$\boxed{x^x = y^y \Leftrightarrow x = y,\; \forall xy > 0}$$

- $x^x = 27$
  $\Rightarrow x^x = 3^3$
  $\therefore x = 3$

Trabajando en clase

Integral

1. Reduce la siguiente expresión:

$$M=\frac{30^2.81^3.15^2}{18^2.27^4}$$

2. Calcula el valor de:

$$E=\frac{2^{x+1}+2^{x+2}+2^{x+3}}{2^{x-3}+2^{x-2}+2^{x-1}}$$

(UNALM 2007 – I)

3. Si $\frac{a}{c}=\sqrt[8]{5}$, determina el valor de la expresión:

$$\frac{\left[\left(a^3.b\right)^3.c\right]^3}{\left[\left(c^3.b\right)^3.a\right]^3}$$

(UNAC 2011 – II)

PUCP

4. Si $x^x = 3$, halla el valor de:

$$K=\sqrt{x^{x^{x+1}}-x^{2x}}$$

Resolución:

Se busca para reemplazarlo por el valor de 3:

$$K=\sqrt{x^{x^x.x^1}-\left(x^x\right)^2}$$

$$K=\sqrt{x^{x^1x^x}-\left(3\right)^2}$$

$$K=\sqrt{\left(x^x\right)^{x^x}-9}=\sqrt{18}$$

$$K=\sqrt{9.2}=3\sqrt{2}$$

5. Si $x^x = 6$, calcula:

$$E=x^{x+x^{1+x}}$$

(CEPREPUC 2013)

6. Luego de efectuar

$$\sqrt[6]{x^5.\sqrt[3]{x^2.\sqrt{x^{-1}}}}$$

Indicar el exponente final de "x".

7. Al resolver y encontrar el valor de "x" en:

$$27^{3^{x+1}}=3^{27^{x+1}}$$

Calcular el valor de: $M = 6x + 10$

(PUCP 2010)

UNMSM

8. Si: $(2x-1)^{2x}=\frac{1024}{2^7x-8^3}$ con $x\neq\frac{1}{2}$, halle $\sqrt[3]{2x+5}$

Resolución:

Sabemos: $$\left(2x-1\right)^{2x}=\frac{\overbrace{1024}^{2^{10}}}{2^7x-\underbrace{4^3}_{2^6}}$$

$$(2x-1)^{2x}=\frac{2^{10}}{2^7x-2^6}$$

Factorizamos en el denominador el 2^6

$$(2x-1)^{2x}=\frac{2^{10}}{2^6\left(2x-1\right)}$$

$$(2x-1)^{2x}.(2x-1)=\frac{2^{10}}{2^6}$$

$$(2x-1)^{2x+1}=2^4$$

Por simple comparación:

$2x-1=2 \wedge 2x+1=4$

$2x=3 \quad \wedge \quad 2x=3$

$\therefore \sqrt[3]{2x+5}=\sqrt[3]{8}=2$

9. Si $(3x-1)^{3x}=3^4$ con $x\neq\frac{1}{3}$, halle $(x-1)$

10. Si $a^a = 2^{64}$. Calcula el valor de "3a".

11. Resuelve la ecuación:

$$2^{2x+2}-5(6^x)=3^{2x+2}$$

Luego calcular el valor de 5^x

(UNMSM 2011 – I)

UNI

12. Calcula el valor de "n" en la siguiente expresión:

$$\frac{\left(\sqrt[\frac{1}{3}]{a^{-4}.\sqrt[\frac{1}{5}]{\sqrt[5]{b^2}}}\right)^{\frac{1}{6}}}{\sqrt[\frac{1}{3}]{\sqrt[3]{a^4}.b^{-6}}}=\left(\frac{b}{a}\right)^n;a\neq b$$

Resolución:

Acomodamos la expresión así:

$$\frac{\left(\sqrt[\frac{1}{3}]{a^{-4}.\sqrt[\frac{1}{5}]{\sqrt[5]{b^2}}}\right)^{\frac{1}{6}}}{\sqrt[\frac{1}{3}]{\sqrt[3]{a^4}.b^{-6}}}=a^{-n}b^n$$

Como se puede observar de la expresión el exponente final de a es –n y de b es "n" para ambos; entonces solo bastará con enfocarnos en a o en b. Escogeremos trabajar con a, así:

$$\frac{\left(\sqrt[\frac{1}{3}]{a^{-4}}\right)^{\frac{1}{6}}}{\sqrt{\sqrt[\frac{1}{3}]{a^{4}}}}=a^{-n}$$

$$\frac{\left(a^{-4}\right)^{\frac{1/6}{1/3}}}{\sqrt[2.\frac{1}{3}]{a^{4}}}=\frac{\left(a^{-4}\right)^{\frac{1}{2}}}{\sqrt[\frac{2}{3}]{a^{4}}}=\frac{a^{-2}}{a^{\frac{4}{2/3}}}=\frac{a^{-2}}{a^{6}}=a^{-8}=a^{-n}$$

13. Para qué valor de "x" se cumple la siguiente igualdad:

$$\frac{\sqrt{(ab)^{2}.\sqrt[3]{cb^{x}}}}{\sqrt[3]{a^{x}\sqrt[4]{\left(\frac{c}{b}\right)^{2}}}}=\left(ab\right)^{\frac{10}{9}};a\neq b$$

(UNI 1993 – II)

14. Calcula el valor de "x" en la expresión:

$$5^{x^{2}}.2^{x^{2}}.100^{-x}=\frac{1}{10}$$

(UNI 1993)