LEY DE SENOS Y LEY DE PROYECCIONES

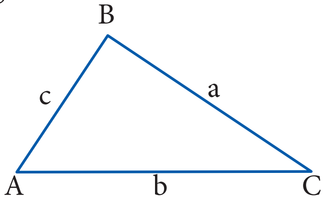
Concepto

Resolver un triángulo es determinar la medida de los tres lados y ángulos.

Para resolver un triángulo oblicuángulo es suficiente conocer la medida de tres elementos entre ángulos y lados, donde por lo menos uno de ellos debe ser un lado.

Ley de senos

En un triángulo ABC



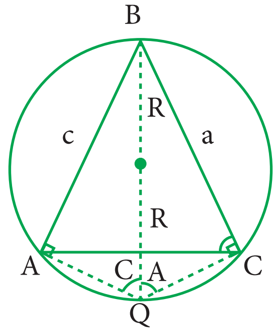
Se cumple:

$$\boxed{\frac{a}{\text{SenA}} = \frac{b}{\text{SenB}} = \frac{c}{\text{SenC}} = 2R}$$

R: Circunradio

Demostración

- Todo triángulo es inscriptible en una circunferencia tal como se observa en la figura:



- Por B trazamos un segmento que pasa por el centro de la circunferencia hasta Q. (BQ = 2R; R: Radio).
- Observar que:
  $m\angle BAQ = 90^\circ$ y $m\angle BCQ = 90^\circ$
  Además:
  $m\angle BQA = C$ y $m\angle BQC = A$

Entonces:

$$\triangle BAQ = \text{SenC} = \frac{c}{2R} \Rightarrow \frac{c}{\text{SenC}} = 2R \;... (1)$$

$$\triangle BCQ = \text{SenA} = \frac{a}{2R} \Rightarrow \frac{a}{\text{SenA}} = 2R \;... (2)$$

Igualando (1) y (2)

$$\frac{c}{\text{SenC}} = \frac{a}{\text{SenA}} = 2R \;... (\alpha)$$

- Trazamos el diámetro que pasa por A se demuestra en forma análoga:

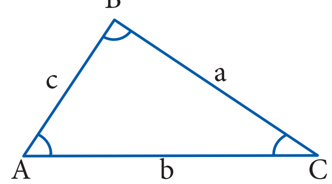
$$\frac{b}{\text{SenB}} = \frac{c}{\text{SenC}} = 2R \;... (\beta)$$

- Se demuestra de (α) y (β):

$$\boxed{\frac{a}{\text{SenA}} = \frac{b}{\text{SenB}} = \frac{c}{\text{SenC}} = 2R}$$

Ley de proyecciones

En todo triángulo ABC:

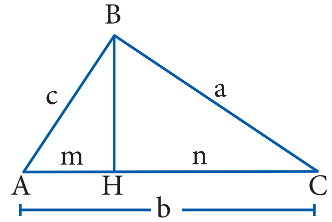


$$\boxed{a = b\,\text{CosC} + c\text{CosB}} \quad \boxed{b = a\,\text{CosC} + c\,\text{CosA}}$$

$$\boxed{c = a\,\text{CosB} + b\,\text{CosA}}$$

Demostración:

- En la figura, trazamos BH:



- Se determina sobre el lado $\overline{AC}$ dos segmentos m y n tal que: b = m + n

$\triangle$AHB: m = c CosA

$\triangle$CHB: n = a CosC

m + n = c CosA + a CosC

$\therefore \boxed{b = c\ \text{CosA} + a\ \text{CosC}}$

Advertencia pre

En todo triángulo oblicuángulo se cumple:

a = 2R SenA

b = 2R SenB

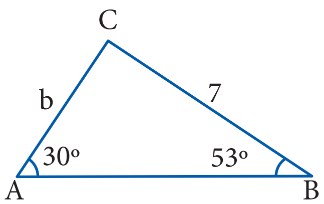
c = 2R SenC

donde: R: circunradio

Trabajando en clase

Integral

1. Según el gráfico mostrado, calcula «b».



2. En un ΔABC, m∠+C = 60º ∧ R = 4. Calcula «c» donde R: circunradio.

3. Se tiene un ΔABC, m∠A = 45º; m∠B = 120º; a = 2. Calcula «b».

PUCP

4. En un ΔABC: a = 3 ∧ b = 5.

Calcula: $S = \dfrac{2\text{SenB} + \text{SenA}}{2\text{SenB} - \text{SenA}}$

Resolución:

Por ley de senos: $\text{SenB} = \dfrac{b}{2R} \wedge \text{SenA} = \dfrac{a}{2R}$

Luego:

$$S = \frac{2\cdot\dfrac{b}{\cancel{2R}} + \dfrac{a}{\cancel{2R}}}{2\cdot\dfrac{b}{\cancel{2R}} - \dfrac{a}{\cancel{2R}}} = \frac{2n + a}{2b - a} = \frac{2(4) + 3}{2(4) - 3}$$

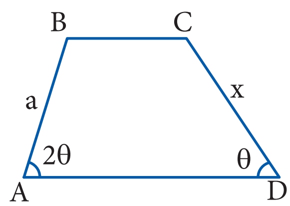
$$2\frac{b}{\cancel{2R}} - \frac{a}{\cancel{2R}}$$

$$S = \frac{11}{5} = 2{,}2$$

5. En un ΔABC: a = 10; b = 13 ∧ c = 15

Calcula: $\dfrac{\text{SenA} + \text{SenB} + \text{SenC}}{\text{SenC} - \text{SenA}}$

6. De la figura, calcula «x» (ABCD: trapecio).



7. En un ΔABC, se cumple:

$$\frac{\text{SenA}}{2} = \frac{\text{SenB}}{3} = \frac{\text{SenC}}{4}$$

Calcula: $F = \dfrac{b^2 + c^2}{b^2 - a^2}$

UNMSM

8. Para un ΔABC, reduce:

M = (a + b) CosC + (a + c) CosB + (b + c) Cos A

Resolución:

M = (a + b) CosC + (a + c) CosB + (b + c) Cos A

M=aCosC+bCosC+aCosB+cCosB+bCosA+cCosA

ordenando, se tiene:

$$M=\underbrace{(a\text{CosC}+c\text{CosA})}_{b}+\underbrace{(b\text{CosC}+c\text{CosB})}_{a}+\underbrace{(a\text{CosB}+b\text{CosA})}_{c}$$

(Ley de proyecciones)

$\therefore$ M = a + b + c

9. Para un ΔABC, reduce:

N = a(CosB + CosC) + b(CosA + CosC) + c(CosA + Cosb)

10. En un ΔABC; de lado a, b $\wedge$ c, ¿a qué es igual?

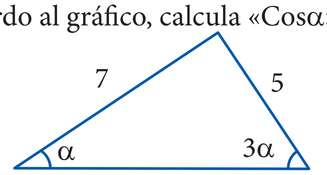
$$F = \frac{c - aCosB}{aSenB}$$

11. En un ΔABC, simplifica:

$$R = \frac{(a - bCosC)TanB \cdot Sen(A + B)}{+bSenC}$$

UNI

12. De acuerdo al gráfico, calcula «Cosα».



Resolución:

Aplicando la ley de senos, tenemos:

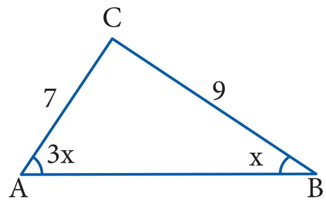
$$\Rightarrow \frac{5}{Sen\alpha} = \frac{7}{Sen3\alpha} \Rightarrow \frac{5}{\cancel{Sen\alpha}} = \frac{7}{\cancel{Sen\alpha}(2Cos2\alpha+1)}$$

$$10Cos2\alpha + 5 = 7 \Rightarrow 10Cos2\alpha = 2 \Rightarrow Cos2\alpha = \frac{1}{5}$$

$$\Rightarrow 2Cos^2 - 1 = \frac{1}{5} \Rightarrow Cos^2\alpha = \frac{3}{5}$$

$$\therefore\ Cos\alpha = \sqrt{\frac{3}{5}}$$

13. De acuerdo al gráfico, calcula «Senα».



14. En el ΔABC, si a = 14; b = 10 $\wedge$ c = 12.

Calcula el valor de la expresión:

$$M = \frac{CscB - CscA}{CscC - CscA}$$