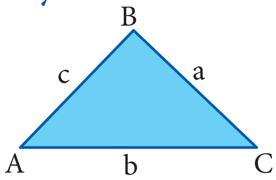
Materiales Educativos GRATIS

TRIGONOMETRIA — QUINTO

LEY DE COSENOS Y LEY DE TANGENTES

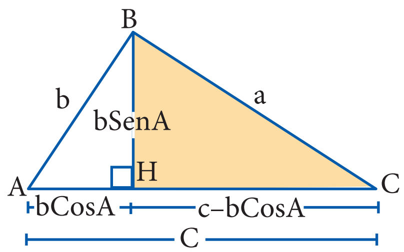
Ley de cosenos



$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\,CosA$
$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\,CosB$
$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\,CosC$

Demostración

- Trazamos la altura BH, determinándose los triángulos rectángulos BHA y CHB.



- En el ◺BHC: (teorema de Pitágoras)

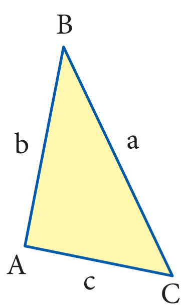
$a^2 = (bSenA)^2 + (c - bCosA)^2$

$a^2 = b^2SenA^2 + c^2 - 2bcCosA + b^2Cos^2A$

$a^2 = b^2\underbrace{(Sen^2A + Cos^2A)}_{uno} + c^2 - 2bcCosA$

$\therefore\ a^2 = b^2 + {}^2 - 2bcCosA$

Ley de tangentes



$\dfrac{a-b}{a+b} = \dfrac{Tg\left(\frac{A-B}{2}\right)}{Tg\left(\frac{A+B}{2}\right)}$
$\dfrac{a-c}{a+c} = \dfrac{Tg\left(\frac{A-C}{2}\right)}{Tg\left(\frac{A+C}{2}\right)}$
$\dfrac{b-c}{b+c} = \dfrac{Tg\left(\frac{B-C}{2}\right)}{Tg\left(\frac{B+C}{2}\right)}$

Nota:
En un ΔABC se cumple:
(2p: perímetro)
P = R(SenA + SenB + SenC)

Demostración

- Sabemos pr el teorema del seno:
$a = 2RSenA \wedge b = 2RSenB$
- Dividiendo se tendrá:

$$\frac{a}{b} = \frac{2RSenA}{2RSenB} \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{SenA}{SenB}$$

- Aplicando proporciones:

$$\frac{a-b}{a+b} = \frac{SenA - SenB}{SenA + SenB}$$

$$\frac{a-b}{a+b} = \frac{2Sen\left(\frac{A-B}{2}\right)Cos\left(\frac{A+B}{2}\right)}{2Sen\left(\frac{A+B}{2}\right)Cos\left(\frac{A-B}{2}\right)}$$

$$\frac{a-b}{a+b} = \frac{2Sen\left(\frac{A-B}{2}\right)Cos\left(\frac{A+B}{2}\right)}{2Sen\left(\frac{A+B}{2}\right)Cos\left(\frac{A-B}{2}\right)}$$

$$\frac{a-b}{a+b} = Tg\left(\frac{A-B}{2}\right)Ctg\left(\frac{A+B}{2}\right)$$

$$\therefore\ \frac{a-b}{a+b} = \frac{Tg\left(\frac{A-B}{2}\right)}{Tg\left(\frac{A+B}{2}\right)}$$

Nota
De Ley de cosenos:

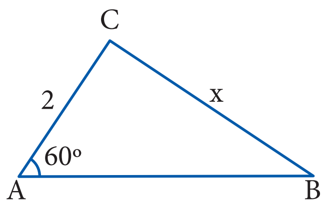
$$CosA = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

Trabajando en clase

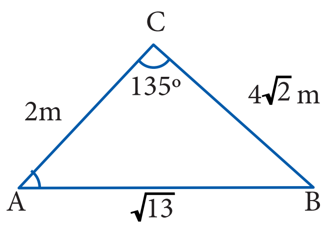
Integral

1. En un ΔABC, si $m\angle B = 120°$; $b = \sqrt{3}$; $c = 1$. Calcula la longitud del lado «a».

2. Del gráfico, calcula «x».

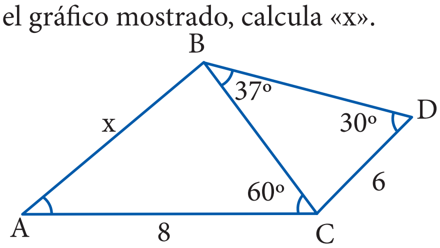


3. Del gráfico mostrado, calcula «m».



PUCP

4. En el gráfico mostrado, calcula «x».



Resolución:

ΔBCD: BC = a ⇒ Aplicando ley de senos, tenemos:

$$\frac{a}{\text{Sen}30°} = \frac{6}{\text{Sen}37°} \Rightarrow a = 6\frac{\text{Sen}30°}{\text{Sen}37°}$$

$$a = 6\frac{\frac{1}{5}}{\frac{1}{5}} \rightarrow a = 5$$

Luego, ΔABC ⇒ aplicando ley de cosenos, tenemos:

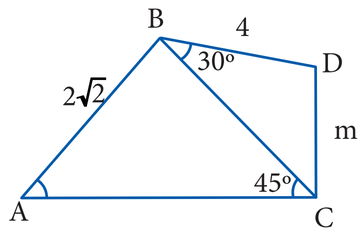
$x^2 = 8^2 + 5^2 - 2.8.5\ \text{Cos}60°$

$x^2 = 64 + 25 - 80\left(\frac{1}{2}\right)$

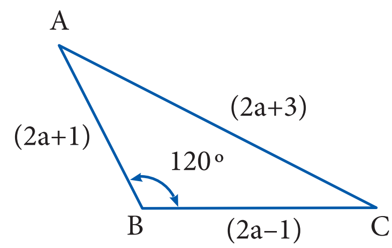
$x^2 = 89 - 40 \rightarrow x^2 = 49$

$\therefore x = 7$

5. Del gráfico mostrado, calcula «m».



6. En el triángulo mostrado, calcula «a».



7. En un ΔABC de lados a, b ∧ c respectivamente, se cumple que:

$$\text{Tan}\left(\frac{A-C}{2}\right)\text{Cot}\left(\frac{A+C}{2}\right) = \frac{1}{3}$$

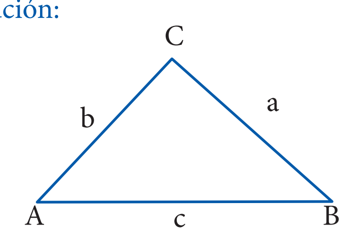
Calcula: $\frac{\text{Sen}A}{\text{Sen}C}$

UNMSM

8. En un ΔABC, se cumple: $\frac{a+b}{a+c} = \frac{c-a}{b}$

Calcula la $m\angle c$.

Resolución:



Del dato:

$\frac{a+b}{a+c} = \frac{c-a}{b}$ operando tenemos:

$ab + b^2 = (a + c)(c - a)$
$ab + b^2 = c^2 - a^2$
Luego: $c^2 = a^2 + b^2 + ab$ ... (1)
por ley de cosenos:
$c^2 = a^2 + b^2 - 2abCosc$ ... (2)
(1) = (2):
$\cancel{a^2} + \cancel{b^2} + ab = \cancel{a^2} + \cancel{b^2} - 2abCos$
$\cancel{ab} = -2\cancel{ab}Cosc \rightarrow Cosc - \frac{1}{2}$
$\therefore C = 120°$

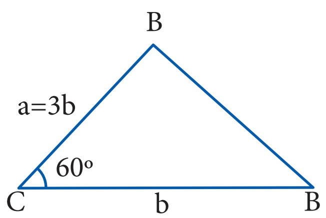
9. En un ---ABC se cumple:
$(a + b + c)(b + c - a) = \frac{bc}{4}$
Calcula «CosA»

10. En un ΔABC de lados a, b ∧ c respectivamente, reduce:
$N = 2(a+b)^2Sen^2\left(\frac{c}{2}\right) - 2ab + (a^2 + b^2)Cosc$

11. En un ----ABC, se cumple que:
$\angle A = 45°; b = 10\sqrt{2} \wedge c - a = 8$
Calcula la longitud del lado «c».

UNI

12. En un ΔABC, ∠c = 60º ∧ a = 3b. Determina el valor de S = Tan(A – B)
Resolución:



$\Rightarrow A + B = 120°$

Por ley de tangentes

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{Tan\left(\frac{A+B}{2}\right)}{Tan\left(\frac{A-B}{2}\right)}$$

$$\Rightarrow \frac{3b+b}{3b-b} = \frac{Tan\left(\frac{120}{2}\right)}{Tan\left(\frac{A-B}{2}\right)} \Rightarrow \frac{4\cancel{b}}{2\cancel{b}} = \frac{Tan60°}{Tan\left(\frac{A-B}{2}\right)}$$

$$\therefore Tan\left(\frac{A-B}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Luego:

$$Tan(A - B) = \frac{2Tan\left(\frac{A-B}{2}\right)}{1 - Tan^2\left(\frac{A-B}{2}\right)}$$

$$\Rightarrow Tan(A - B) = \frac{2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{1 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{1 - \frac{3}{4}}$$

$$\Rightarrow Tan(A - B) = 4\sqrt{3}$$

13. En un ΔABC, ∠B = 30º; a = 4c. Determina el valor de:
F = Tan(A – C)

14. En un ΔABC, se cumple que:
$\frac{a+c}{a-c} = 4Tan\left(\frac{B}{2}\right) \cdot Cot\left(\frac{A -}{C2}\right)$

Calcula:
$N = \frac{TanA + TanB + TanC}{TanA \cdot TanC}$