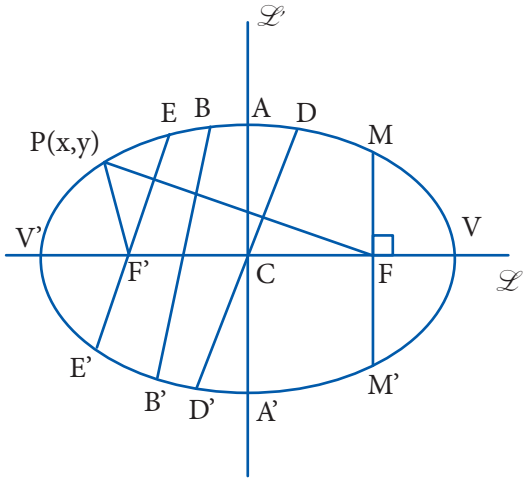
LA ELIPSE

Definición

Una elipse es el lugar geométrico de un punto que se mueve en un plano de tal manera que la suma de sus distancias a dos puntos fijos de ese plano es siempre igual a una constante, mayor que la distancia entre los dos puntos.

Elementos



F, F': focos de la elipse

C: centro

V, V': vértices de la elipse

$\mathscr{L}$: eje focal

$\mathscr{L}$': eje normal

$\overline{VV'}$: eje mayor

$\overline{AA'}$: eje menor

$\overline{MM'}$: lado recto

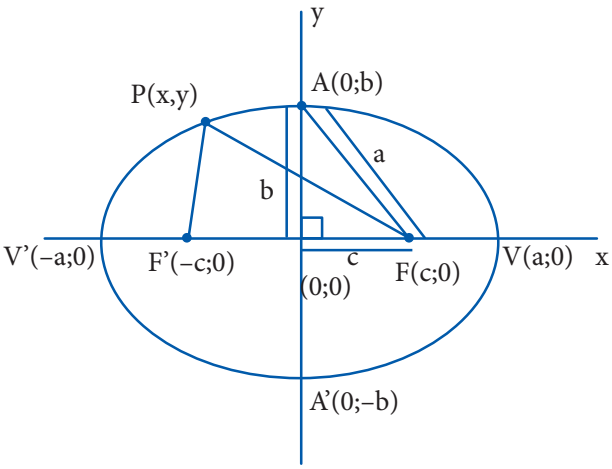
$\overline{BB'}$: cuerda

$\overline{EE'}$: cuerda focal

$\overline{DD'}$: diámetro

$\overline{PF'}$, $\overline{PF'}$: radio vectores

Ecuación de la elipse con centro en el origen de coordenadas



Su ecuación será:

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1}$$

Además:

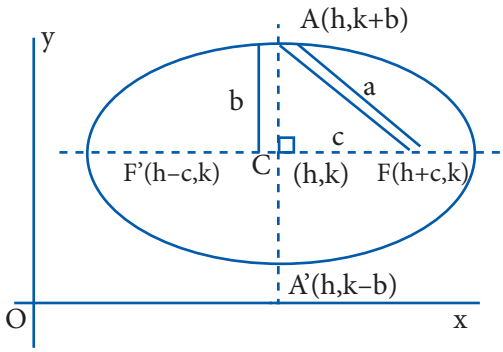
$$\boxed{a^2 = b^2 + c^2}$$

Observación

Área de una región elíptica

$$\boxed{A = a \cdot b\,\pi}$$

Ecuación de la elipse con centro C(h, k)



Su ecuación será:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

Excentricidad (e)

Se llama excentricidad a la razón

$$e = \frac{c}{a}$$

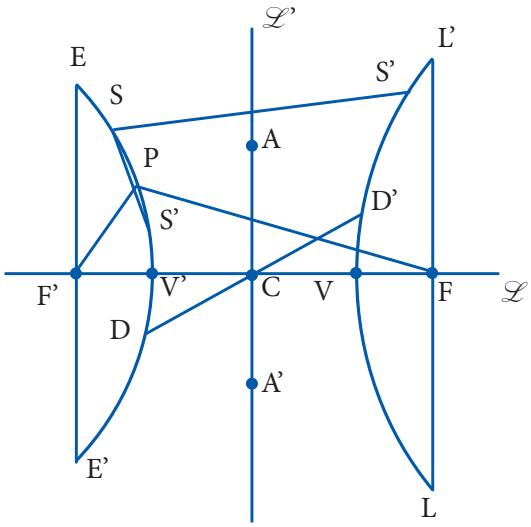
Observación

Como $c < a$ se tiene siempre que: $e < 1$

La hipérbola

Definición

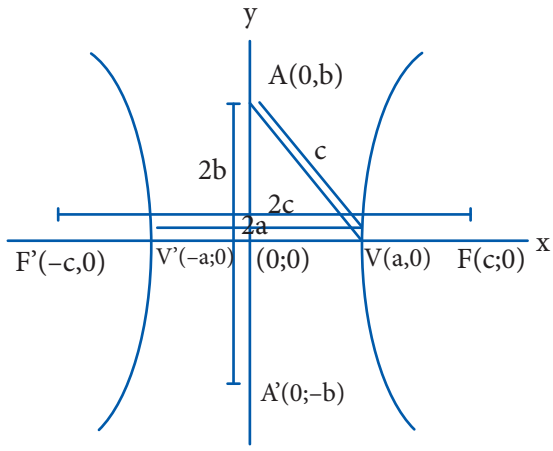
Es el lugar geométrico de un punto que se mueve en un plano de tal manera que el valor absoluto de la diferencia de sus distancias a dos puntos fijos del plano, llamados focos, es siempre igual a una cantidad constante, positiva y menor que la distancia entre los focos.



Elementos

F, F': focos de la hipérbola
C: centro
V, V': vértices de la hipérbola
$\mathscr{X}'$: eje focal
$\mathscr{X}$: eje normal
$\overline{VV'}$; eje transverso
$\overline{AA'}$: eje conjugado
$\overline{LL'}$: lado recto
$\overline{SS'}$, $\overline{SS''}$: cuerdas
$\overline{EE'}$: cuerda focal
$\overline{DD'}$: diámetro
$\overline{FP}$, $\overline{FP'}$: radio vectores

Ecuación de la hipérbola con centro en el origen de coordenadas



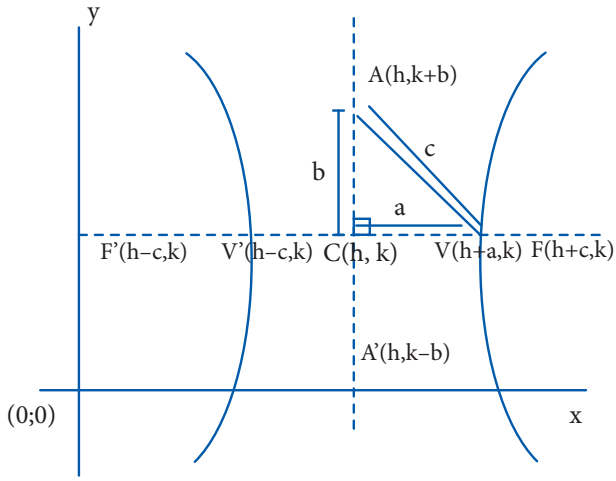
Su ecuación será:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Además:

$$c^2 = a^2 + b^2$$

Ecuación de la hipérbola con centro C(h, k)



Su ecuación será:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

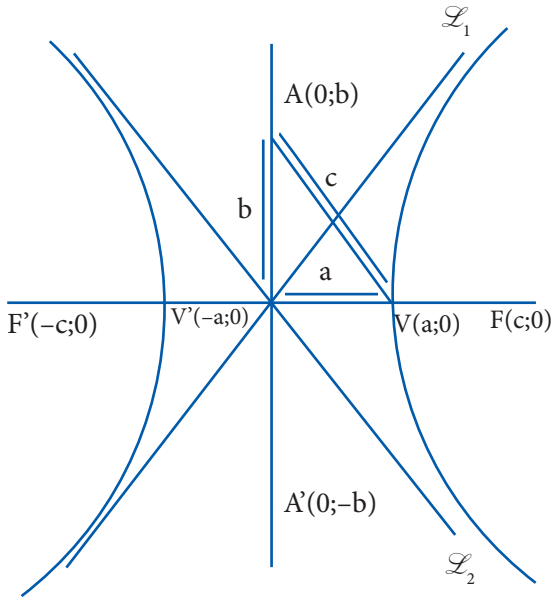
Excentricidad (e)

Se llama excentricidad a la razón:

$$e = \frac{c}{a}$$

Observación:
Como c > a se tiene siempre que e > 1.

Asíntotas de la hipérbola



- Las rectas $\mathscr{L}_1$ y $\mathscr{L}_2$ son llamadas asíntotas de la hipérbola.

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Tienen por ecuación:

$$\boxed{\begin{array}{l} \mathscr{L}_1: bx + ay = 0 \\ \mathscr{L}_2: bx - ay = 0 \end{array}}$$

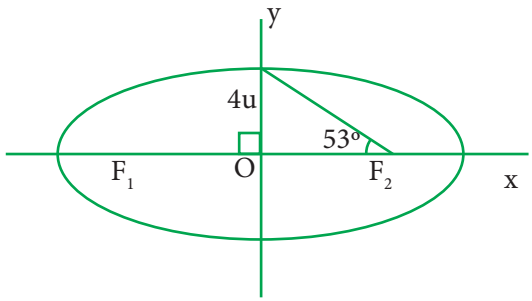
Advertencia pre

La distancia entre los vértices de la elipse es: $V_1V_2 = 2a$

Trabajando en clase

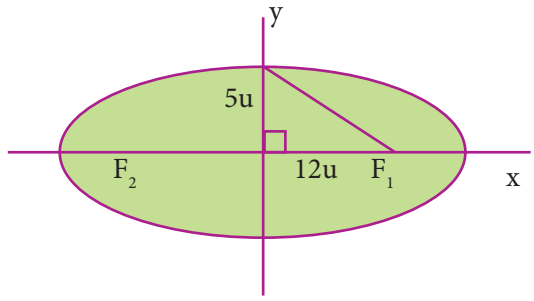
Integral

1. Determina la ecuación de la elipse si F_1 y F_2 son sus focos.



2. Para la ecuación dada de la hipérbola $9x^2 - 4y^2 = 36$. Halla las coordenadas de los vértices y los focos.

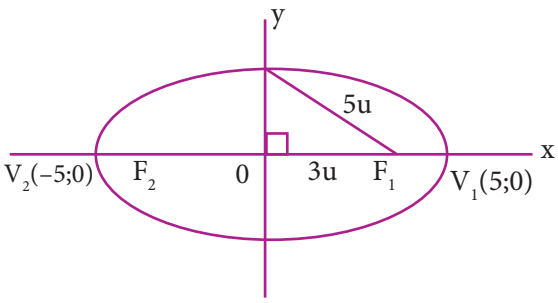
3. Calcula el área de la región elíptica F_1 y F_2 son focos.



PUCP

4. Determina la ecuación de la elipse que tiene su centro en (0; 0) y cuyos focos son los puntos $F_1(3; 0)$ y $F_2(-3; 0)$; además uno de sus vértices tiene por coordenadas $V_1(5; 0)$.

Resolución:
Como uno de los vértices de la elipse es $V_1(5; 0)$, se tiene que $a = 5$ y como $c = 3$ se tiene que $b^2 = 5^2 - 3^2 = 16 \rightarrow b = 4$



Luego su ecuación viene dada por:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{5^2} + \frac{y^2}{4^2} = 1$$

$$\therefore \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$$

5. Determina la ecuación de la elipse que tiene su centro en (0; 0) y cuyos focos son los puntos $F_1(4; 0)$ y $F_2(-4; 0)$, además uno de sus vértices tiene por coordenadas $V(-5; 0)$.

6. La ecuación de la elipse es: $9x^2 + 4y^2 = 36$. Calcula su excentricidad.

7. Determina la ecuación de la elipse cuyos vértices son $V_1(4; 0)$ y $V_2(-4; 0)$ y cuyos focos son los puntos $F_1(3; 0)$ y $F_2(-3; 0)$

UNMSM

8. Calcula las longitudes de los radios vectores al punto P(3; 4) de la hipérbola.
$9x^2 - 4y^2 - 54x + 8y + 113 = 0$
Resolución:
Vamos a reducir la ecuación anterior a la forma ordinaria completando cuadrados
$9(x^2 - 6x) - 4(y^2 - 2y) = -113$
$9(x^2 - 6x + 9) - 4(y^2 - 2y + 1) = -113 + 81 - 4$
De donde:
$9(x - 3)^2 - 4(y - 1)^2 = -36$

$$\rightarrow \frac{(y-1)^2}{9} - \frac{(x-3)^2}{4} = 1$$

Luego: $a^2 = 9 \rightarrow a = 3$
$b^2 = 4 \rightarrow b = 2$

Además: $c^2 = a^2 + b^2 \rightarrow c = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}$
y el centro es (3; 1)
Luego las coordenadas del foco son $F_1(3; 1 + \sqrt{13})$ y $F_2(3; 1 - \sqrt{13})$
Los radios vectores son:

$$d(PF_1) = \sqrt{(3-3)^2 + (4-(1+\sqrt{13}))^2}$$

$$\rightarrow d(PF_1) = 3 - \sqrt{3}$$

$$d(PF_2) = \sqrt{(3-3)^2 + (4-(1-\sqrt{3}))^2}$$

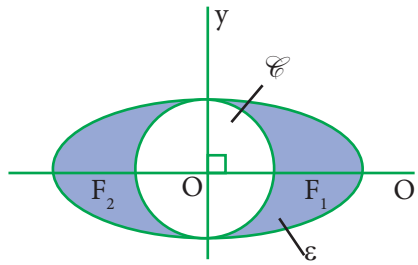
$$\rightarrow d(PF_2) = 3 + \sqrt{3}$$

$\therefore$ Los radios vectores son: $3 - \sqrt{3}$ u y $3 + \sqrt{3}$ u.

9. Calcula las longitudes de los radios vectores al punto M(5; –2) de la hipérbola
$x^2 - 9y2 - 4x + 36y - 41 = 0$

10. Los vértices de una hipérbola son (0; 4), (0; –4) y su excentricidad es igual a 3/2. Determina la ecuación de la hipérbola.

11. Del gráfico, calcula el área de la región sombreada F_1 y F_2 son focos.



$$\varepsilon : \frac{x^2}{144} + \frac{y^2}{81} = 1$$

$\mathscr{C}: x^2 + y^2 = 81$

UNI

12. Determina las ecuaciones de las rectas tangentes de pendiente 2 a la elipse $4x^2 + 5y^2 = 8$
Resolución:
Las rectas tangentes de pendiente 2 tendrán la forma:
$y = 2x + k; k \div cte$
luego reemplazando y en la ecuación de la elipse tenemos:
$4x^2 + 5(2x + k)^2 = 8$

$4x^2 + 5(4x^2 + 4kx + k^2) = 8$

$24x^2 + 20kx + 5k^2 - 8 = 0$

Como las rectas son tangentes la ecuación cuadrática anteriormente mencionada debe de tener solución única, entonces:

$\Delta = (20k)^2 - 4(24)(5k^2 - 8) = 0$

$\rightarrow k = \pm \dfrac{4\sqrt{15}}{5}$

$\therefore$ Las ecuaciones de las rectas tangentes serán:

$10x - 5y - 4\sqrt{15} = 0$

$10x - 5y + 4\sqrt{15} = 0$

13. Determina las ecuaciones de las rectas tangentes de pendiente 3 a la elipse.

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$$

14. Determina el ángulo agudo de intersección de las asíntotas de la hipérbola:

$$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$$