



DIVISIBILIDAD

I. CONCEPTO

Se dice que un número es divisible por otro cuando el cociente de su división resulta siempre un número entero.

Sean «a», «b» y «c» números enteros.

Si:

$$\begin{array}{r} a \quad | \quad b \\ 0 \quad c \end{array}$$

o $\frac{a}{b} = c \quad b \in \mathbb{Z}^+$

Entonces podemos afirmar lo siguiente:

«a» es múltiplo de «b»
«b» es divisor de «a»

Notación:

$\overset{\circ}{n} \rightarrow$ se lee múltiplo de n

Ejemplo:

$\overset{\circ}{11} \rightarrow$ se lee múltiplo de 11

II. Representación general de los múltiplos de un número

Observemos los múltiplos de $\overset{\circ}{7}$:

$\overset{\circ}{7}$: ..., -14; -7; 0; 7; 14; 21; ...

↓ ↓ ↓ ↓ ↓ ↓

..., 7(-2); 7(-1); 7(0); 7(1); 7(2); 7(3); ...

En general, todo múltiplo de siete es de la forma:

$$\overset{\circ}{7} = 7k \quad \text{con } k \in \mathbb{Z}$$

En general:

$$\overset{\circ}{n} = nk$$

III. NÚMEROS NO DIVISIBLES

Ejemplos:

Expresa 43 en función de $\overset{\circ}{9}$

Por defecto

$$\begin{array}{r} 43 \quad | \quad 9 \\ 7 \quad 4 \end{array}$$

$$43 = 9 \times 4 + 7$$

$$43 = \overset{\circ}{9} + 7 \quad \rightarrow \text{sobran } 7$$

Por exceso

$$\begin{array}{r} 43 \quad | \quad 9 \\ 2 \quad 5 \end{array}$$

$$43 = 9 \times 5 - 2$$

$$43 = \overset{\circ}{9} - 2 \quad \rightarrow \text{faltan } 2$$

• Propiedad:

Si:

$$N = \overset{\circ}{A} + \textcircled{6}$$

$$N = \overset{\circ}{B} + \textcircled{6} \quad \rightarrow \text{residuos iguales}$$

$$N = \overset{\circ}{C} + \textcircled{6}$$

$$\Rightarrow N = \overline{\text{MCM}(\overset{\circ}{A}, \overset{\circ}{B}, \overset{\circ}{C})} + 6$$

IV. OPERACIONES CON MÚLTIPLOS

1. $\overset{\circ}{n} + \overset{\circ}{n} + \overset{\circ}{n} = \overset{\circ}{n}$

2. $\overset{\circ}{n} - \overset{\circ}{n} = \overset{\circ}{n}$

3. $k \cdot \overset{\circ}{n} = \overset{\circ}{n}$ cuando $k \in \mathbb{Z}$

4. $\begin{matrix} \text{J} \circ \text{N} \\ \text{L} \text{ n} \text{P} \end{matrix} = \overset{\circ}{n}$ cuando $k \in \mathbb{Z}$

V. TEOREMA DE ARQUÍMEDES

Casos prácticos:

Caso 1: si $5a = \overset{\circ}{9} \rightarrow a = \overset{\circ}{9}$

Caso 2: $9x = \overset{\circ}{45} \rightarrow x = \overset{\circ}{5}$

Trabajando en clase

INTEGRAL

- De los primeros 600 números enteros positivos, ¿cuántos son múltiplos de 7?
- ¿Cuántos números de 4 cifras son $\overset{\circ}{7} + 2$?
- Al dividir «M» entre 7, el residuo fue 5; además, «N», al dividirse entre 7, dejó un residuo igual a 4. ¿Qué residuo se obtendrá al dividir «M x N» entre 7?

PUCP

- ¿Cuántos números de 4 cifras son múltiplos de 17 y terminan en cifra 3?

PUCP 2012-II

Resolución

Sea el número:

$$\overline{abc3} = \overset{\circ}{17} = 17k$$

Entonces:

$$1000 \leq 17k < 10\,000$$

$$\frac{1000}{17} \leq 17k < \frac{10000}{17}$$

$$58; \dots \leq k < 588, \dots$$

Valores posibles de k:

$$59, 60, 61, \dots, 588$$

Como debe terminar en cifra 3 los valores que tomen «k» debe de terminar en 9

Valores de k: 59; 69; 79; ...; 579

$$\text{Valores permitidos} = \frac{579 - 59}{10} + 1 = 53$$

∴ 53 números

- ¿Cuántos números de 3 cifras son múltiplos de 15 y terminan en cifra 0?

- Si $5A = \overset{\circ}{10}$ y $3B = \overset{\circ}{15}$ (A y B son enteros), entonces el producto A x B es necesariamente:

- Simplifica:

$$E = (\overset{\circ}{7} + 1) + (\overset{\circ}{7} + 2) + (\overset{\circ}{7} + 3) + \dots + (\overset{\circ}{7} + 70)$$

UNMSM

- Si $\overline{76m9n}$ es un múltiplo de 107, determina el máximo valor de (m + n)

UNMSM 2013-II

Resolución:

$$\overline{76m9n} = \overset{\circ}{107}$$

Realizamos la descomposición polinómica del numeral

$$76090 + 100m + n = \overset{\circ}{107}$$

$$64748 \quad 64748$$

$$107+13 \quad 107-7$$

$$13 + n - 7m = \overset{\circ}{107}$$

$$\downarrow \quad \downarrow$$

$$1 \quad 2$$

$$8 \quad 3$$

$$m + n = 1 + 2 = 3$$

$$m + n = 8 + 3 = 11$$

$$\text{valor}_{(\text{máx})} = 11$$

- Si $\overline{52a6b}$ es un múltiplo de 115, calcula el máximo valor de a + b

- Del 1 al 358, determina:

I. ¿Cuántos son múltiplos de 7?

II. ¿Cuántos no son múltiplos de 11?

Da como respuesta la suma de ambos términos

- El numeral que resulta de: $\overline{aaa} - \overline{bbb}$ siempre es divisible por:

UNI

- En una reunión se cuenta entre 400 y 450 personas, de las cuales $\frac{3}{7}$ son varones; los $\frac{2}{5}$ usan lentes y los $\frac{2}{3}$ son profesionales. ¿Cuántas mujeres había en la reunión?

Resolución

$$400 < \text{personas} < 450$$

$$\frac{3}{7} \times \text{total} = \text{son varones}$$

$$\frac{2}{5} \times \text{total} = \text{usan lentes}$$

$$\frac{2}{5} \times \text{total} = \text{son profesionales}$$

$$\text{Total} \begin{cases} \rightarrow \text{múltiplo de 7} \\ \rightarrow \text{múltiplo de 5} \\ \rightarrow \text{múltiplo de 3} \end{cases}$$

$$\text{Total} = \overline{\text{MCM}(7; 5; 3)}$$

$$\text{Total} = \overset{\circ}{105}$$

$$\Rightarrow \text{Total} = 420$$

$$\text{Cantidad de mujeres} = \frac{4}{7} \times 420$$

Rpta.: hay 240 mujeres

- En un barco con 180 personas, ocurre un naufragio y de los sobrevivientes se conoce que: $\frac{2}{5}$ fuman, $\frac{3}{7}$ son casados y $\frac{2}{3}$ son ingenieros. Determina cuántas personas murieron en dicho accidente.

- Sabiendo que:

$$A = \overline{abc3}_8 \times \overline{aa102}_8 \times \overline{bb32}_8,$$

calcula el residuo de dividir «A» entre 8.