Materiales Educativos GRATIS

ALGEBRA TERCERO

INECUACIÓN DE SEGUNDO GRADO

DEFINICIÓN

Se le denomina también inecuación cuadrática.

Forma general:

$$\boxed{P(x) = ax^2 + bx + c \gtrless 0;\ a \neq 0}$$

Donde: $\{a; b; c\} \subset \mathbb{R}$

La solución de la inecuación depende del primer coeficiente y del discriminante:

$$\boxed{\Delta = b^2 - 4ac}$$

Primer caso

Si $\Delta > 0$; $(a > 0)$, el polinomio $ax^2 + bx + c$, es factorizable en el campo real. Para resolver utilizaremos el método de los puntos críticos.

$$\boxed{\begin{array}{l} a(x - x_1)(x - x_2) > 0 \\ a(x - x_1)(x - x_2) < 0 \end{array}}$$

Procedimiento:

1. Se factoriza el polinomio.
2. Se hallan los dos puntos críticos, luego se ordenan en la recta real en forma creciente.
3. Es indispensable que el primer coeficiente de cada factor lineal sea positivo, por ello, se colocan entre los puntos críticos los signos (+) y (–) alternadamente de derecha a izquierda, comenzando por el signo (+).
4. Si tenemos:
   $P(x) = ax^2 + bx + c < 0$ ó $P(x) = ax^2 + bx + c \leq 0$, el conjunto solución estará formado por los intervalos donde aparezca el signo (–)

En forma análoga:

Si $P(x) = ax^2 + bx + c > 0$ ó $P(x) = ax^2 + bx + c \geq 0$, el conjunto solución estará formado por el intervalo donde aparece el signo (+).

Ejemplos:

1. Resuelve:

$$x^2 - x - 6 \geq 0$$

Resolución:

$a = 1$ $\quad b = -1$ $\quad c = -6$

Como: $\Delta = (-1)^2 - 4(1)(-6)$

$\Delta = 25 > 0$

Luego, factorizamos:

$x^2 \ - \ x \ - \ 6 \geq 0$

$x \qquad -3$

$x \qquad\ \ 2$

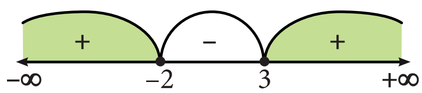
$(x - 3)(x + 2) \geq 0$

Puntos críticos

$x - 3 = 0 \rightarrow x = 3$

$x + 2 = 0 \rightarrow x = -2$

Graficando:



$\therefore$ C S.: $\langle -\infty; -2] \cup [3; +\infty\rangle$

2. Resuelve:

$$-x^2 + 2x + 8 > 0$$

Resolución:

Cambiando el signo: $x^2 - 2x - 8 < 0$

Como $a = 1 \quad b = -2 \quad c = -8$

$\Delta = (-2)^2 - 4(1)(-8) \rightarrow \Delta = 36$

factorizamos:

$x^2 \ - 2x \ - 8 < 0$

$x \qquad -4$

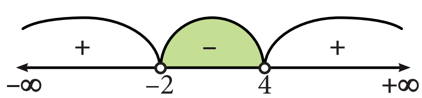
$x \qquad\ \ 2$

$(x - 4)(x + 2) < 0$

Puntos críticos: $\quad x - 4 = 0 \rightarrow x = 4$

$\qquad\qquad\qquad\quad x + 2 = 0 \rightarrow x = -2$

Graficando:



$\therefore$ C S.: $\langle -2; 4\rangle$

Segundo Caso

Si $\Delta = 0$; $(a > 0)$

el polinomio $ax^2 + bx + c$ se transforma a un trinomio cuadrado perfecto de la forma:

$$\boxed{(mx + n)^2 \gtrless 0}$$

Ejemplo:

1. Resuelve:

$$x^2 - 10x + 25 \gtrless 0$$

Resolución:

Calculando el discriminante

$\Delta = (-10^2) - 4(1)(25) = 0$

$\Rightarrow \underbrace{x^2 - 10 + 25}_{\text{trinomio cuadrado perfecto}} \geq 0$

$(x - 5)^2 \geq 0$

Resolviendo cada una de las desigualdades:

a) $(x - 5)^2 \geq 0$

Se verifica: $\forall\ x \in \mathbb{R}$

$\therefore$ C.S. $= \mathbb{R}$

b) $(x - 5)^2 > 0$

Se verifica: $\forall\ x \in \mathbb{R}$; a excepción de

$x - 5 = 0$

$x = 5$

$\therefore$ C.S. $= \mathbb{R} - \{5\}$

c) $(x - 5)^2 < 0$

Se observa una inecuación, la cual no verifica para ningún valor de $x \in \mathbb{R}$.

$\therefore$ C.S. $= \varnothing$

d) $(x - 5)^2 \leq 0$

La inecuación solo se cumple si $x = 5$

$\therefore$ C.S. $= \{5\}$

Tercer caso:

Si $\Delta < 0$; $(a > 0)$, el polinomio $ax^2 + bx + c$ se transforma en cuadrado más un cuarto número real positivo, de la forma:

$$(mx + n)^2 + k \gtrless 0;\ k < 0$$

Ejemplo:

1. Resuelve:

$$x^2 + 2x + 6 > 0$$

Resolución:

Calculando el discriminante:

$\Delta = (2)^2 - 4(1)(6)$

$\Delta = -20 < 0$

$\Rightarrow x^2 + 2x + 1 + 5 > 0$

$(x + 1)^2 + 5 > 0$

Resolviendo cada una de las desigualdades:

a) $(x + 1)^2 + 5 > 0$

Se verifica: $\forall\ x \in \mathbb{R}$

$\therefore$ C.S. $= \mathbb{R} = \langle -\infty; +\infty \rangle$

b) $(x + 1)^2 + 5 \geq 0$

Se verifica: $\forall\ x \in \mathbb{R}$

$\therefore$ C.S. $= \mathbb{R} = \langle -\infty; +\infty \rangle$

c) $(x + 1)^2 + 5 < 0$

Nunca se verifica, pues el primer miembro siempre es mayor que cero:

$\therefore$ C S.: $\varnothing$

d) $(x + 1)^2 + 5 \leq 0$

Nunca se verifica:

$\therefore$ C S.: $\varnothing$

Trabajando en clase

Integral

1. Resuelve: $5x^2 - 45 \geq 0$

2. Resuelve:

$$3x^2 - 27 < 0$$

Indica la suma de todos los valores enteros que toma «x».

3. Resuelve: $5x^2 + 3x > 0$

PUCP

4. Resuelve:

$$x^2 - 7x - 18 \leq 0$$

Resolución:

- Verificamos que: $a = 1$; $b = -7$; $c = -18$, el discriminante:

  $\Delta = (-7)^2 - 4(1)(-18)$

  $\Delta = 49 + 72$

  $\Delta = 121$

  Observamos que: $a > 0 \wedge \Delta > 0$, entonces utilizaremos el método de los puntos críticos.

- Factorizamos: $x^2 \ - 7x \ - 18$

  $$\begin{array}{ccc} x & & -9 \\ x & & 2 \end{array}$$

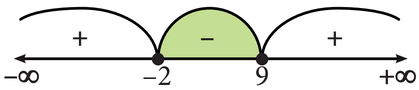
  $\rightarrow (x - 9)(x + 2) \leq 0 \ldots$ (x)

- Hallando los puntos críticos:

  $x - 9 = 0 \rightarrow x = 9$

  $x + 2 = 0 \rightarrow x = -2$

- Graficamos:



$\therefore$ C S. = [−2; 9]
Nota: Seleccionamos la parte negativa del gráfico por el signo de la desigualdad; es «≤» en la expresión x.

5. Resuelve: $x^2 - 11x + 10 > 0$

6. Resuelve: $6x^2 - x \leq 6$. Indica el mayor valor entero que toma «x».

7. Resuelve:

$$(3x + 2)^2 < (2x + 3)^2$$

Indica la cantidad de valores enteros que toma «x».

UNMSM

8. Resuelve: $x^2 + 2x + 7 > 0$.
Resolución:
Se observa: a = 1; b = 2; c = 7
Luego: $\Delta = (2)^2 - 4(1)(7)$
$\Delta = -24$
Entonces: $\Delta < 0$
Para este caso, no se puede factorizar en los racionales, por lo cual:

$$\underbrace{x^2 + 2x + 1}_{\text{trinomio cuadrado perfecto}} + 6 > 0$$

$$\underbrace{(x^2 + 1)2 + 6}_{\text{siempre es positivo}} > 0$$

Todo ello implica que «x» toma cualquier valor real.
$\therefore$ C.S. = $\mathbb{R}$
también: C S. = $\langle -\infty; +\infty \rangle$

9. Resuelve: $x^2 - 4x + 8 \geq 0$

10. Resuelve: $x^2 - 9x + 25 < 0$

11. Resuelve la siguientes inecuaciones:
a) $x^2 - 4x + 4 > 0$
b) $x^2 - 4x + 4 \geq 0$
c) $x^2 - 4x + 4 < 0$
d) $x^2 - 4x + 4 \leq 0$

UNI

12. Si el conjunto solución de la inecuación:

$$x^2 + mx + n \leq 0 \text{ es } [-5; 3]$$

Calcula «m.n»
Resolución:
- Como el C S. = [−5; 3], esto implica que −5 y 3 son puntos críticos de $x^2 + mx + n \leq 0$.
- Luego, −5 y 3 son raíces de $x^2 + mx + n = 0$, aplicamos:
$x_1 + x_2 = -\frac{m}{1}$
$-5 + 3 = -m \Rightarrow m = 2$
$x_1 \cdot x_2 = -\frac{n}{1}$
$(-5)(3) = n \Rightarrow n = -15$
- Nos piden: m.n = (2)(−15)
$\therefore$ mn = −30.

13. Si el conjunto solución de la inecuación:

$$x^2 + ax + b \leq 0$$

es [−2; 3], ¿cuál es el valor de «ab»?

14. Resuelve:

$$x^2 - 2x + 1 \leq 0$$

Da como respuesta la cantidad de números enteros que puede tomar «x»