# INECUACIONES

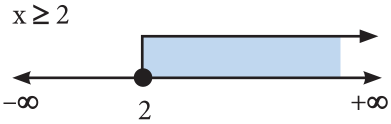
## I. Inecuación Lineal

Forma general: $\boxed{ax + b \gtrless 0}$

Ejemplo

1. $2x + 1 \geq 5$

   $x \geq 2$



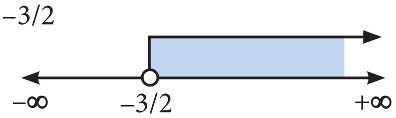

$\therefore$ CS = $[2;+\infty\rangle$

2. $-2x + 3 < 6$

   $-2x < 3$

   negativo   cambia de sentido

   $x > -3/2$




$\therefore$ CS = $\langle -3/2;+\infty\rangle$

3. $3x + 1 < 2(x + 1) + x$

   $\cancel{3x} + 1 < \cancel{2x} + 2 + \cancel{x}$

   $1 < 2$ (verdad)

   CS = $\mathbb{R}$

4. $4(x - 1) + 7 \leq 2(2x - 3)$

   $\cancel{4x} - 4 + 7 \# \cancel{4x} - 6$

   $3 \leq -6$ (absurdo)

   $\therefore$ CS = $\varnothing$

## II. Inecuación Cuadrática

Forma general

$\boxed{ax^2 + bx + c \gtrless 0}$

Para su resolución se emplea el método de los puntos críticos

Ejemplo:

1. $x^2 - 5x + 6 \leq 0$

   Factorizamos:

   $x^2 - 5x + 6 \leq 0$

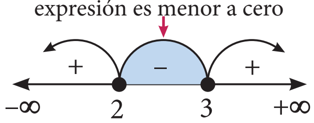
   x   −3

   x   −2

   $\underbrace{(x - 3)}_{=0}\underbrace{(x - 2)}_{=0} \leq 0$

   Puntos críticos: 3; 2

Se pinta la zona negativa, ya que la expresión es menor a cero




$\therefore$ CS = $[2;3]$

2. $x^2 - 4x > 0$

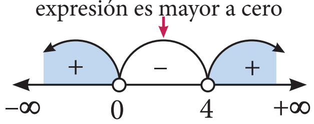
   Factorizamos

   $x^2 - 4x > 0$

   $\underbrace{x}_{=0}\underbrace{(x - 4)}_{=0} > 0$

   Puntos críticos: 0; 4

Se pinta la zona positiva, ya que la expresión es mayor a cero




$\therefore$ CS = $\langle -\infty;0\rangle \cup \langle 4;+\infty\rangle$

## Observaciones

1. Si: $(ax + b)^2 \geq 0 \rightarrow$ CS = $\mathbb{R}$

   $(ax + b)^2 > 0 \rightarrow$ CS = $\mathbb{R} - \{-b/a\}$

   $(ax + b)^2 \leq 0 \rightarrow$ CS = $\{-b/a\}$

   $(ax + b)^2 < 0 \rightarrow$ CS = $\varnothing$

2. Si: $ax^2 + bx + c$

   Tiene $a > 0 \wedge \Delta < 0$

   Entonces: $\underbrace{ax^2 + bx + c}_{\text{«Trinomio positivo»}} > 0$

## III. Inecuación de Grado Superior

Para determinar los puntos críticos se utiliza la factorización por divisores binomicos o aspa doble.

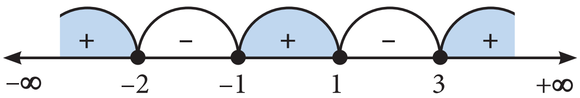
Ejemplo:

$x^4 - x^3 - 7x^2 + x + 6 \geq 0$

Factorizando por aspa doble

$\underbrace{(x - 1)}_{=0}\underbrace{(x + 2)}_{=0}\underbrace{(x - 3)}_{=0}\underbrace{(x + 1)}_{=0} \geq 0$

Puntos críticos: –2; –1; 1; 3




CS = $\langle -\infty;-2] \cup [-1;1] \cup [3;+\infty\rangle$

## IV. Inecuación fraccionaria

**Forma general**

$$\frac{f(x)}{g(x)} \gtrless 0$$

Toma en cuenta $g(x) \neq 0$ y para hallar los puntos críticos se iguala $f(x) = 0 \wedge g(x) = 0$

Ejemplo:

1. $\frac{x-2}{x+3} > 0$

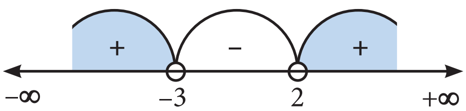
   $x + 3 \neq 0 \rightarrow x \neq -3$

   Puntos críticos

   $x - 2 = 0$ $\qquad$ $x + 3 = 0$

   $x = 2$ $\qquad$ $x = -3$

   PC $\rightarrow$ –3; 2




   CS = $\langle -\infty;-3\rangle \cup \langle 2;+\infty\rangle$

2. $\frac{(x+1)(x-3)}{(x-5)} \# 0$

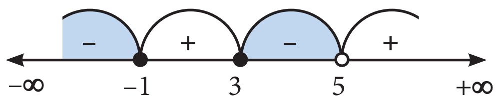
   $x - 5 \neq 0 \rightarrow x \neq 5$

   Puntos críticos

   $x + 1 = 0$; $x - 3 = 0$; $x - 5 = 0$

   $x = -1$; $x = 3$; $x = 5$

   PC $\rightarrow$ –1; 3 ; 5




   CS = $\langle -\infty;-1] \cup [3;5\rangle$

## V. Inecuación irracional

### Teorema 1

Si x; y $\in \mathbb{R}$, $\sqrt{x} \leq y \Leftrightarrow x \geq 0 \wedge y \geq 0 \wedge x \leq y^2$

### Teorema 2

$\forall\, y < 0;\ \sqrt{x} \geq y \Leftrightarrow x \geq 0$

### Teorema 3

$\forall\, y \geq 0;\ \sqrt{x} \geq y \Leftrightarrow x \geq 0 \wedge x \geq y^2$

# Trabajando en clase

### Integral

**1.** Resuelve:

$$\frac{3x-4}{2} + \frac{5x-6}{4} \$ \frac{8-7x}{2}$$

**2.** Resuelve:

$2x - 5 < x + 3 < 3x - 7$

UNFV 2005

**3.** Resuelve:

$a(x - b) - b(x - a) \leq a^2 - b^2;\ a < b$

CEPREUNAC 2012

### PUCP

**4.** Determina el conjunto solución de la siguiente inecuación:

a) $(2x - 5)^2 < (5x - 2)^2$

Resolución

$\Rightarrow (2x - 5)^2 < (5x - 2)^2$

$4x^2 - \cancel{20x} + 25 < 25x^2 - \cancel{20x} + 4$

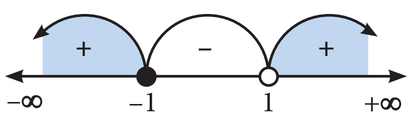
$21 < 21x^2$

$0 < \cancel{21}x^2 - \cancel{21}$

$0 < x^2 - 1$

$0 < \underbrace{(x+1)}_{0}\underbrace{(x-1)}_{0}$

$x = -1; x = 1$




CS = $\langle -\infty;-1\rangle \cup \langle 1;+\infty\rangle$

**5.** Determina el conjunto solución de cada una de las siguientes inecuaciones

a) $(3x + 2)^2 > (2x + 3)^2$

b) $3x^2 - 10x < 0$

c) $6x^2 - 11x - 10 \geq 0$

**6.** Calcula el valor de m.n, si:

$x^2 + mx + n \geq 0$ y su

CS = $\langle -\infty;-3] \cup [2;+\infty\rangle$

**7.** Determina el conjunto solución de cada una de las siguientes inecuaciones:

a) $x^2 + 6x + 9 < 0$

b) $x^2 + 6x + 9 > 0$

c) $x^2 + 6x + 9 \leq 0$

d) $x^2 + 6x + 9 \geq 0$

## UNMSM

**8.** Calcula el menor número «k» con la propiedad de que $\forall\ x \in \mathbb{R}$ se cumple

Resolución

Ordenando la inecuación

$0 \leq x^2 - 6x + k - 1$

Como cumple para todo $x \in \mathbb{R}$, entonces el trinomio es positivo si y solo si

$\Delta \leq 0 \wedge a > 0$

$(-6)^2 - 4(k-1) \leq 0 \ \wedge\ 1 > 0$

$36 - 4k + 4 \leq 0$

$40 \leq 4k$

$\boxed{10 \leq k}$

$\therefore$ El menor valor de $k = 10$

**9.** Calcule el mayor número real «r» que satisface la relación $r \leq x^2 + 4x + 6,\ \forall\ x \in \mathbb{R}$

**10.** Resuelve e indique el número de valores enteros positivos que lo verifican:

$$2x^3 - 3x^2 - 11x + 6 \leq 0$$

**11.** Resuelve:

$$(2x+1)^7(x-3)^4(x+7)^3(x-5) \geq 0$$

## UNI

**12.** Determina el conjunto solución de la inecuación:

$$\frac{x^2 - 5x + 4}{x - 1} \ \# \ 0$$

Resolución

$$\Rightarrow \frac{x^2 - 5x + 4}{x - 1} \ \# \ 0$$

$$\Rightarrow \frac{(x-4)\cancel{(x-1)}}{\cancel{x-1}} \ \# \ 0; x \ ! \ 1$$

$\Rightarrow x \leq 4$

$\therefore$ C.S. $= \langle -\infty; 4] - \{1\}$

**13.** Al resolver:

$$\frac{x^2}{(x-1)(x+7)} < \frac{25}{(x-1)(x+7)}$$

se obtiene:

$x \in \langle a; -b \rangle \cup \langle c; b \rangle$

Calcula abc

**14.** Calcula el conjunto solución:

$$\frac{7}{x+2} \ \$ \ \frac{8}{x-5}$$