IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS

Obervamos lo siguiente

- La igualdad $(x-2)(x+2)=0$, es cierta si y solamente si, cuando $x=2 \vee x=-2$.
  A este tipo de igualdad se le denomina «ecuación condicional».
- En cambio la igualdad: $(x-2)(x+2) \equiv x^2-4$
  Cumple para todo valor de «x»
  A este tipo de igualdad se le denomina «identidad».

Definición

Una identidad trigonométrica es una igualdad que contiene expresiones trigonométricas que se cumplen para todo valor admisible del ángulo
Por ejemplo
La identidad: $\text{Sen}^2x+\text{Cos}^2x=1$

Identidades fundamentales

Las identidades trigonométricas fundamentales sirven de base para la demostración de otras identidades más complejas
Se clasifican en tres formas:

- Por cociente
- Recíprocas
- Pitagóricas

a. Identidades por cociente

$$\text{Tg}\alpha=\frac{\text{Sen}\alpha}{\text{Cos}\alpha}$$

$$\text{Ctg}\alpha=\frac{\text{Cos}\alpha}{\text{Sen}\alpha}$$

Se observa que $\text{Tg}\alpha=\dfrac{1}{\text{Ctg}\alpha}$

b. Identidades recíprocas

$$\text{Sen}\alpha=\frac{1}{\text{Csc}\alpha}$$

$$\text{Cos}\alpha=\frac{1}{\text{Sec}\alpha}$$

$$\text{Tg}\alpha=\frac{1}{\text{Ctg}\alpha}$$

c. Identidades pitagóricas

$\text{Sen}^2\alpha+\text{Cos}^2\alpha=1$
$1+\text{Ctg}^2\alpha=\text{Csc}^2\alpha$
$1+\text{Tg}^2\alpha=\text{Sec}^2\alpha$

- Algunas identidades auxiliares
  - $\text{Sen}^4\alpha+\text{Cos}^4\alpha=1-2\text{Sen}^2\alpha\text{Cos}^2\alpha$
  - $\text{Tg}\alpha+\text{Ctg}\alpha=\text{Sec}\alpha.\text{Csc}\alpha$
  - $\text{Sen}^6\alpha+\text{Cos}^6\alpha=1-3\text{Sen}^2\alpha\text{Cos}^2\alpha$
  - $\text{Sec}^2\alpha+\text{Csc}^2\alpha=\text{Sec}^2\alpha.\text{Csc}^2\alpha$

  Ejemplo:
  Simplifica:

$$E=(1-\text{Cos}x)(\text{Csc}x+\text{Ctg}x)$$

$$E=(1-\text{Cos}x)\left(\frac{1}{\text{Sen}x}+\frac{\text{Cos}x}{\text{Sen}x}\right) \rightarrow E=(1-\text{Cos}x)\left(\frac{1+\text{Cos}x}{\text{Sen}x}\right)$$

$$E=\frac{1-\text{Cos}^2x}{\text{Sen}x}=\frac{\cancel{\text{Sen}^2x}}{\cancel{\text{Sen}x}} \Rightarrow E=\text{Sen}x$$

Eliminación del ángulo

Estos ejercicios consistes en que a partir de ciertas relaciones trigonométricas debemos determinar relaciones algebraicas, en las que no aparezca el ángulo.
Nos ayudaremos de identidades como por ejemplo:

- Elimina α en la siguiente relación trigonométrica:
  $\text{Csc}\alpha=m+n$ ... (I)
  $\text{Ctg}\alpha=m-n$ ... (II)
  Resolución:
  $\text{Csc}\alpha=m+n \wedge \text{Ctg}\alpha=m-n$
  $\text{Ctg}^2\alpha=(m+n)^2=m^2+2mn+n^2$ (–)
  $\text{Ctg}^2\alpha=(m-n)^2=m^2-2mn+n^2$
  $\text{Csc}^2\alpha-\text{Ctg}^2\alpha=m^2+2mn+n^2-m^2+2mn-n^2$
  $\therefore\ 1=4mn$

- Recomendación:
  Cuando en un problema de identidades trigonométricas estés frente a esta expresión:

$$E=(\text{Sen}x \pm \text{Cos}x)$$

  y se te pide Senx.Cosx, se recomienda que eleves el cuadrado ambos miembros para obtener:

$$E^2=(\text{Sen}x \pm \text{Cos}x)^2$$

  $E^2=\text{Sen}^2x \pm 2\text{Sen}x\text{Cos}x+\text{Cos}^2x$
  $E^2=\underbrace{\text{Sen}^2x+\text{Cos}^2x}_{} \pm 2\text{Sen}x\text{Cos}x$
  $E^2=1 \pm \underbrace{2\text{Sen}x\text{Cos}x}_{\text{Lo que se pide}}$

- Recordar la identidad algebraica
  $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ac)$
- Identidad importante
  $(1 \pm \text{Sen}\theta \pm \text{Cos}\theta)^2=2(1 \pm \text{Sen}\theta)(1 \pm \text{Cos}\theta)$

Trabajando en clase

Integral

1. Simplifica:

$$E = \text{Cosx.Tgx} - \text{Senx}$$

2. Si $\text{Senx} + \text{Cosx} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$. Calcula: $P = \text{Senx.Cosx}$

3. Simplifica:

$$R = \text{Ctgx.Sen}^2\text{x} - \text{Tgx.Cos}^2\text{x}$$

PUCP

4. Simplifica:

$$Q = \frac{\text{Secx} - \text{Cosx}}{\text{Cscx} - \text{Senx}}$$

Resolución:

Transformamos a senos y cosenos:

$$\frac{\dfrac{1}{\text{Cosx}} - \text{Cosx}}{\dfrac{1}{\text{Senx}} - \text{Senx}} = \frac{\dfrac{1 - \text{Cos}^2\text{x}}{\text{Cosx}}}{\dfrac{1 - \text{Sen}^2\text{x}}{\text{Senx}}} = \left[\frac{\dfrac{\text{Sen}^2\text{x}}{\text{Cosx}}}{\dfrac{\text{Cos}^2\text{x}}{\text{Senx}}}\right]$$

$$= \frac{\text{Sen}^3\text{x}}{\text{Cos}^3\text{x}} = \text{Tg}^3\text{x}$$

$$\therefore\ Q = \text{Tg}^3\text{x}$$

5. Simplifica:

$$C = \frac{\text{Senx} + \text{Tgx}}{1 + \text{Secx}}$$

6. Reduce:

$$K = (\text{Tgx} + \text{Ctgx}).\ \text{Cos}^2\text{x}$$

7. Simplfica:

$$T = \frac{\text{Cosx} + \text{Senx.Tgx}}{\text{Senx.Secx}}$$

UNMSM

8. Si: $\text{Tgx} - \text{Ctgx} = \text{b}$. Calcula:

$$H = \text{Tg}^2\text{x} + \text{Ctg}^2\text{x}$$

Resolución:

Elevamos al cuadrado el dato:

$$\text{Tg}^2\text{x} \underbrace{- 2\text{Tgx.Ctgx}}_{} + \text{Ctg}^2\text{x} = \text{b}^2$$

$$\underbrace{\text{Tg}^2\text{x} + \text{Ctg}^2\text{x}}_{} - 2 = \text{b}^2$$

$$H = \text{b}^2 + 2$$

9. Si $\text{Tgx} - \text{Ctgx} = 3$. Calcula:

$$U = \text{Tg}^2\text{x} + \text{Ctg}^2\text{x}$$

10. Elimina el ángulo en:

$m = \text{Senx}$ .....(I)

$n = \text{Cosx}$ .....(II)

11. Si: $\text{Tgx} + \text{Ctgx} = 3$. Calcula:

$$K = \text{Sen}^6\text{x} + \text{Cos}^6\text{x}$$

UNI

12. Si $\text{Cscx} + \text{Ctgx} = 5$. Calcula:

$$E = \text{Senx}$$

Resolución:

Aplicamos la propiedad:

Si $\text{Cscx} + \text{Ctgx} = m \Rightarrow \text{Cscx} - \text{Ctgx} = \dfrac{1}{m}$

Entonces:

$$\begin{aligned} \text{Cscx} + \text{Ctgx} &= 5 \\ \text{Cscx} - \text{Ctgx} &= \frac{1}{5} \end{aligned} \quad \Big\downarrow (+)$$

$$\cancel{2}\text{Cscx} = \frac{\cancel{26}^{\,13}}{5}$$

Invirtiendo:

$$\text{Senx} = \frac{5}{13}$$

13. Si $\text{Cscx} + \text{Ctgx} = 7$. Calcula:

$$H = \text{Senx}$$

14. Si $\text{Tg}^2\text{x} + \text{Ctg}^2\text{x} = 7$. Calcula:

$$G = \text{Tgx} + \text{Ctgx}$$