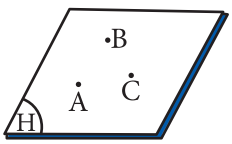
GEOMETRÍA DEL ESPACIO

Postulado fundamental

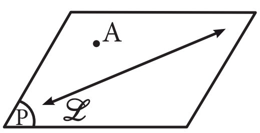
Tres puntos no colineales determina un plano al cual pertenecen.



Si A, B y C son puntos no colineales, entonces A, B y C determinan el plano H.

Teoremas importantes

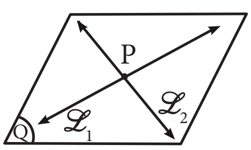
1. Una recta y un plano que no pertenecen a ella determinan un plano.



Si: $A \notin \overleftrightarrow{\mathscr{L}}$

A y $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}$ determinan el plano P.

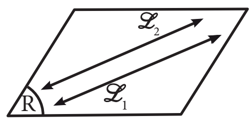
2. Dos rectas secantes determina un plano.



$\overleftrightarrow{\mathscr{L}}_1 \cap \overleftrightarrow{\mathscr{L}}_2 = \{P\}$

$\overleftrightarrow{\mathscr{L}}_1$ y $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}_2$ determinan el plano Q.

3. Dos rectas paralelas determinan un plano.

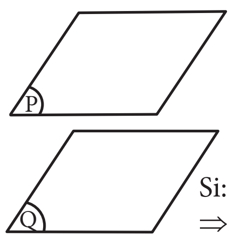


Si $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}_1 // \overleftrightarrow{\mathscr{L}}_2$

$\overleftrightarrow{\mathscr{L}}_1$ y $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}_2$ determinan el plano R.

Posiciones relativas entre dos planos

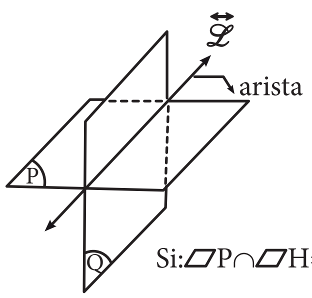
a) Planos paralelos



Si: ▱P // ▱Q

$\Rightarrow$ ▱P $\cap$ ▱Q $= \phi$

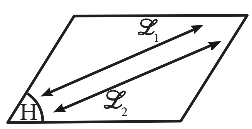
b) Planos secantes



Si: ▱P $\cap$ ▱H $= \{\overleftrightarrow{\mathscr{L}}\}$

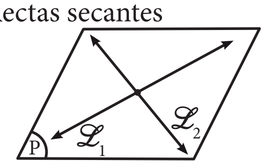
Posiciones relativas entre dos rectas

a) Rectas paralelas



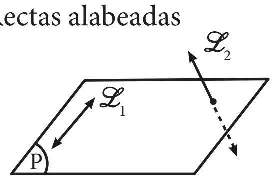
Dos rectas paralelas siempre son coplanares.

b) Rectas secantes



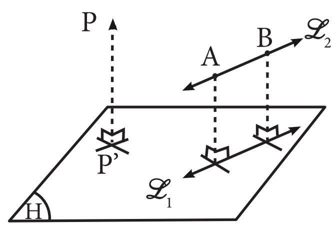
Dos rectas secantes siempre son coplanares porque determina un plano.

c) Rectas alabeadas



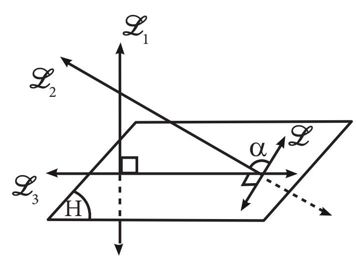
Si dos rectas no son paralelas ni secantes.

Proyección ortogonal de un plano y una recta sobre un plano



- P' es proyección ortogonal de P sobre el plano H.
- $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}_1$ es la proyección ortogonal de $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}_2$ sobre el plano H.

Teorema de las tres rectas perpendiculares



Si $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_1} \perp \square H$

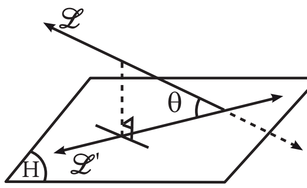
$\overleftrightarrow{\mathscr{L}_2} \perp \overleftrightarrow{\mathscr{L}} \; (\overleftrightarrow{\mathscr{L}_2} \subset \square H)$

$\Rightarrow \overleftrightarrow{\mathscr{L}_3} \perp \overleftrightarrow{\mathscr{L}}$

$\therefore \alpha = 90^\circ$

Ángulo entre una recta y un plano

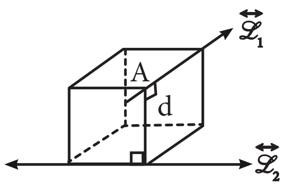
El ángulo entre una recta y un plano, se mide con el ángulo que determina la recta con su proyección en dicho plano.



- θ es la medida del ángulo entre $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}$ y el plano H.

Distancia entre dos rectas alabeadas

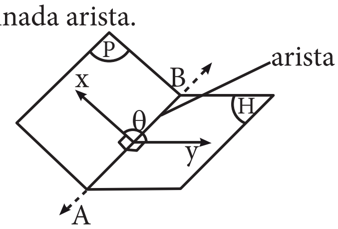
Es la longitud del segmento perpendicular a las dos rectas alabeadas, cuyos extremos pertenecen uno a cada recta.



Ángulo diedro y ángulo poliedro

1. Ángulo diedro

Es la figura geométrica formada por dos semiplanos que tienen en común su recta de origen denominada arista.



Ángulo diedro $\overleftrightarrow{AB}$ y $(H - \overleftrightarrow{AB} - P)$

θ: medida del ángulo diedro

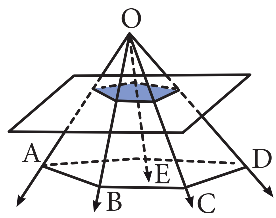
Planos perpendiculares

Dos planos son perpendiculares, cuando determinan un diedro que mide 90º.

2. Ángulo poliedro

Es la figura que se genera cuando un rayo es desplazado por los lados de un polígono, manteniendo fijo su origen y exterior al plano que contiene al polígono.

Ángulo poliedro O – ABCDE



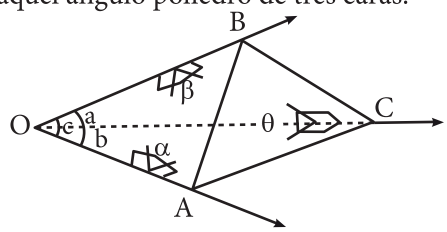
Propiedad

En todo ángulo poliedro, la suma de las medidas de las caras es:

$$\boxed{0^\circ < S_{m(caras)} < 360^\circ}$$

3. Ángulo triedro

Es aquel ángulo poliedro de tres caras.



Ángulo triedro: O – ABC

Triedro: O – ABC

Medidas de las caras: a, b, c

Medidas de los diedros: α, β, θ

Propiedades

$$\boxed{0^\circ < a + b + c < 360^\circ}$$

$$\boxed{a - c < b < a + c}$$

$$\boxed{180^\circ < \alpha + \beta + \theta < 540^\circ}$$

$$\boxed{\text{Si } a > c \Rightarrow \alpha > \theta}$$

Advertencia pre

- Sea «n» el # de puntos:

$$\Rightarrow \begin{matrix}\#\text{ planos} \\ \text{máximo}\end{matrix} = C_3^n$$

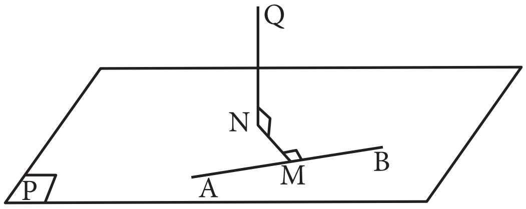
- Sea «n» el # de rectas:

$$\Rightarrow \begin{matrix}\#\text{ planos} \\ \text{máximo}\end{matrix} = C_2^n$$

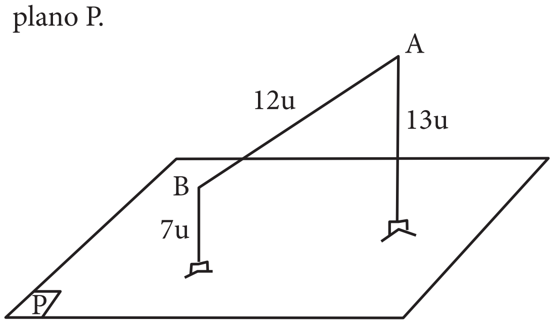
Trabajando en clase

Integral

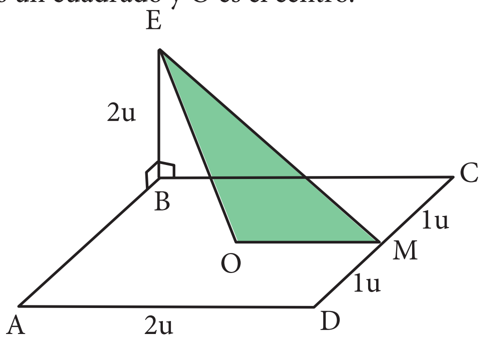
1. Calcula «MN», si AQ = QB = 13 u; NQ = 12 u y AB = 8 u.



2. Calcula la medida del ángulo formado por $\overline{AB}$ y el plano P.

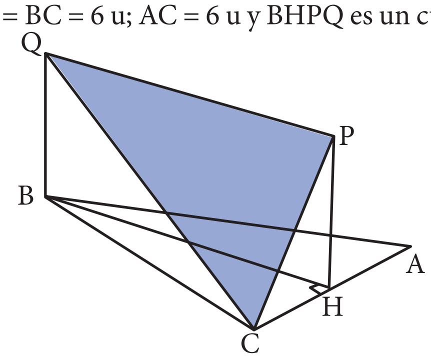


3. Calcula el área de la región sombreada, si ABCD es un cuadrado y O es el centro.

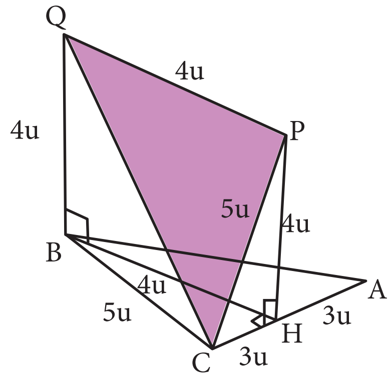


PUCP

4. Calcula el área de la región triangular CPQ, si AB = BC = 6 u; AC = 6 u y BHPQ es un cuadrado.



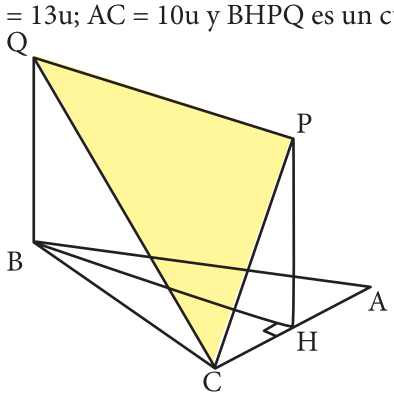
Resolución:



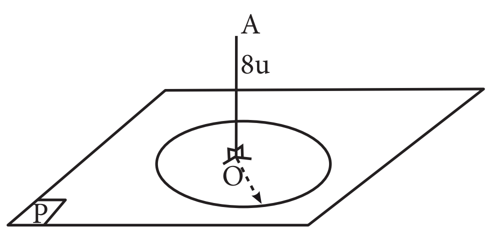
- ❖ BH = 4 u; por ser BHPQ cuadrado QP = 4u = HP
- ❖ PC = 5 u y m∠QPC = 90º

$$\text{Área}_{CPQ} = \frac{(5u)\cdot(4u)}{2} = 10\ u^2$$

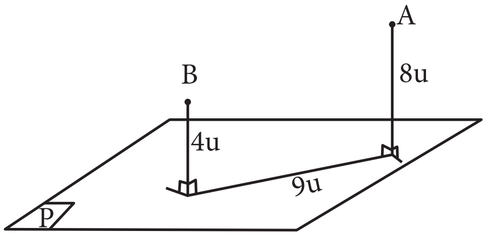
5. Calcula el área de la región triangular CPQ, si AB = BC = 13u; AC = 10u y BHPQ es un cuadrado.



6. Calcula la distancia del punto «A» hacia cualquier recta tangente a la circunferencia de diámetro 12 u.

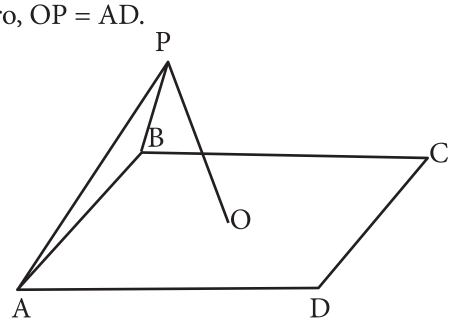


7. Calcula la menor distancia de «A» hacia «B» pasando por un punto del plano P.

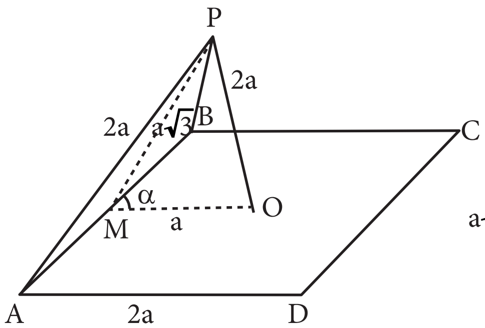


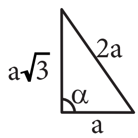
UNMSM

8. Calcula la medida del diedro $\overleftrightarrow{AB}$, si O es centro del cuadrado ABCD y el triángulo ABP es equilátero, OP = AD.



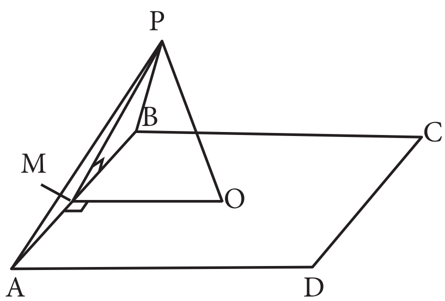
Resolución:
Trazamos OM = a y MP = $a\sqrt{3}$
Entonces:





α = 90º

9. Calcula la medida del ángulo MPO, M punto medio de $\overline{AB}$, O es centro del cuadrado ABCD y el triángulo ABP es equilátero, OP = AD.

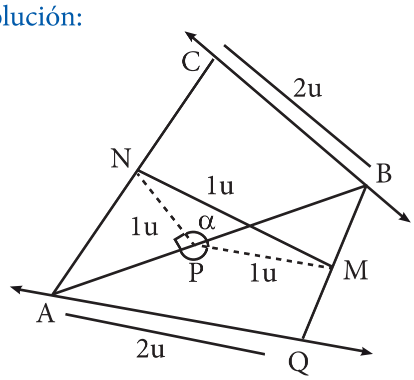


10. Calcula la medida del ángulo entre $\overleftrightarrow{AO}$ y el plano que contiene al triángulo equilátero ABC, si dicho triángulo y un cuadrado BPQC de centro O están contenidos en planos perpendiculares.

11. Calcula la medida del ángulo entre $\overleftrightarrow{AD}$ y $\overleftrightarrow{OP}$, si en un cuadrado ABCD de centro O se traza $\overleftrightarrow{CP}$ perpendicular al plano que contiene al cuadrado, si AD = 6 u y OP = 5 u.

UNI

12. Calcula la medida del ángulo entre $\overleftrightarrow{AQ}$ y $\overleftrightarrow{BC}$, si se tienen los triángulos ABC y ABQ no coplanares, AQ = BC = 2 u, M es punto medio de $\overleftrightarrow{BQ}$ y N es punto medio de $\overleftrightarrow{AC}$, MN = 1 u.
Resolución:



Trazamos $\overleftrightarrow{MP}$ y $\overleftrightarrow{NP}$, entonces NP = MP = 1 u por lo tanto el triángulo MNP es equilátero.
$\therefore \alpha = 60º$

13. Calcula la medida del ángulo entre $\overleftrightarrow{AQ}$ y $\overleftrightarrow{BC}$, si se tienen los triángulos ABC y ABQ no coplanares, AQ = BC = 4 u, M es punto medio de $\overleftrightarrow{BQ}$ y N es punto medio de $\overleftrightarrow{AC}$, MN = 2 u.

14. Calcula la medida del diedro P – AB – C, si el triángulo ABC es equilátero y APQB es un rectángulo, si PM = MQ, AP = $4\sqrt{3}$ u, AC = 10 u y MC = $3\sqrt{3}$ u.