Materiales Educativos GRATIS

ALGEBRA CUARTO

FUNCIÓN INYECTIVA, SURYECTIVA Y BIYECTIVA

Definiciones

1. Función inyectiva:

Denominada también univalente o uno a uno, se dice inyectiva si a cada elemento del rango le corresponde un único valor del dominio.
Es decir:

- F es inyectiva si y solo si para $x_1; x_2 \in \text{Dom } F$ con $x_1 \neq x_2 \rightarrow F(x_1) \neq F(x_2)$

Equivalente:

- F es inyectiva si y solo si $F(x_1) = F(x_2)$; entonces $x_1 = x_2$.

Ejemplo:

Demostremos que $F(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$ es inyectiva.

Resolución:

Sean $x_1; x_2 \in \text{Dom } F$ de modo que $F(x_1) = F(x_2)$; entonces

$F(x_1) = F(x_2)$

$$\frac{x_1+1}{x_1-1} = \frac{x_2+1}{x_2-1}$$

$x_1x_2 + x_2 - x_1 - 1 = x_1x_2 + x_1 - x_2 - 1$

$\rightarrow\ 2x_2 = 2x_1$

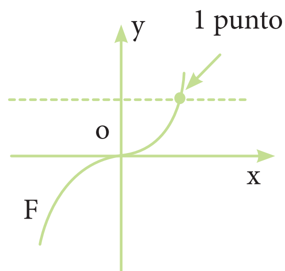
$\rightarrow\ x_2 = x_1$

$\therefore$ F es inyectiva

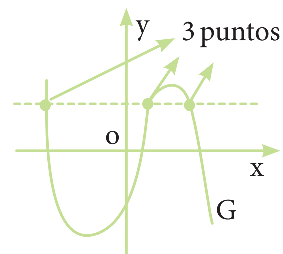
Teorema

F es inyectiva si toda recta horizontal corta a su gráfica a lo más en un punto.

Ejemplo:



$\therefore$ F es inyectiva



$\therefore$ G no es inyectiva

2. Función sobreyectiva:

Llamada también: suprayectiva, epiyectiva y suryectiva.

Sea $F: A \rightarrow B$

F es sobreyectiva si solo si RanF = B

Es decir ; cuando el rango de la función es igual al conjunto de llegada.

3. Función biyectiva:

Una función se dice que es biyectiva si es inyectiva y sobreyectiva a la vez.

Trabajando en clase

Integral

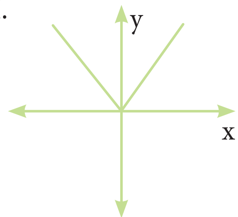
1. Escribe verdadero (V) o falso (F) sustentando tu respuesta.

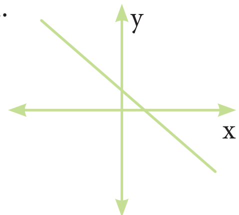
$\{(x; y) \in \mathbb{R}^2 / y = x^2 - 2\}$ es inyectiva ( )

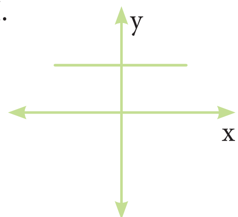
$\{(x; y) \in \mathbb{R}^2 / y = -3x + 2\}$ es inyectiva ( )

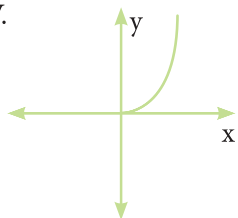
$\{(x; y) \in \mathbb{R}^2 / y = \dfrac{2x+1}{x-3}\}$ es inyectiva ( )

2. Indica cuál de las siguientes gráficas corresponde a un función inyectiva:

I.


III.


II.


IV.


3. Determinar cuántas de las siguientes relaciones, son funciones inyectivas.
$R_1 = \{(2; 6), (3; 5), (4; 1), (-8; 3)\}$
$R_2 = \{(-3; 4), (1; 5), (6; 2), (-3; 7)\}$
$R_3 = \{(1; 3), (4; 5), (-6; 7), (7; 3)\}$
$R_4 = \{(1; 1), (3; 3), (6; 6), (7; 7)\}$

Católica

4. En la siguiente función inyectiva:
$F = \{(a + b; 6), (a - b; 2), (7; 3), (10; 6), (4; 2)\}$
Calcula «ab».

Resolución:

Por teorema: si $F(x_1) = F(x_2) \to x_1 = x_2$
Luego se debe de cumplir:

$$\begin{aligned} (a + b; 6) = (10; 6) &\Rightarrow \quad a + \cancel{b} = 10 \ \ldots \text{(I)} \\ (a - b; 2) = (4; 2) &\Rightarrow \quad a - \cancel{b} = 4 \ \ \ldots \text{(II)} \end{aligned} \quad \downarrow(+)$$

$$\begin{aligned} \text{Resolvemos el sistema:} \quad & 2a = 14 \\ \Rightarrow \quad & a = 7 \\ \Rightarrow \quad & b = 3 \\ \therefore \quad & «a.b» = 21 \end{aligned}$$

5. En la siguiente función inyectiva:
$G = \{(2a + b; 7), (a - b; 4), (5; 1), (11; 7), (-2; 4)\}$
Calcula «ab».

6. Dada la función: $F(x) = 3x - 1$; de modo que: $[a; 3\rangle \to [2; b\rangle$. Calcula «a + b» si se sabe que «F» es sobreyectiva.

7. Dada la función: $F(x) = -2x + 3$
donde $F: [2; 7\rangle \to \langle a; b]$. Calcula «ab», sabiendo que «F» es suprayectiva.

UNMSM

8. Dada $F: [3; 5] \to [5; T]$ y $F(x) = (x - 7)^2 + 1$. Sabiendo que la función es epiyectiva; calcula el valor de «T».

Resolución:

Calculamos el rango previamente:

Sabemos: $\text{Dom}(F) = [3; 5] \to 3 \le x \le 5$
restamos 7 $\to -4 \le -7 \le -2$
elevamos al cuadrado $\to 4 \le (x - 7)^2 \le 16$
sumamos 1 $\to 5 \le (x - 7)^2 + 1 \le 17$
donde $\text{Ran}(F) = [5; 17]$

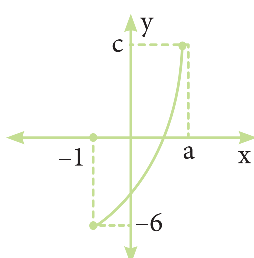
Luego por ser epiyectiva (sobreyectiva) se cumple:

$$[5; T] = [5; 17]$$
$$\therefore \quad T = 17$$

9. Sea $F: [2; a\rangle \to [b; 30\rangle$ definida por: $F(x) = x^2 + 5$, una función suprayectiva. Calcula «a.b».

10. Sea la función:
$F(x) = (x - 5)^2 + 2$
definida por: $F: \langle 3; 9\rangle \to [a, b\rangle$
calcula: «a + b»

11. Sea la función:
$F: [-1; 3] \to [b; c]$ con $F(x) = (x + 1)^2 - 6$ siendo F sobreyectiva cuya gráfica es:

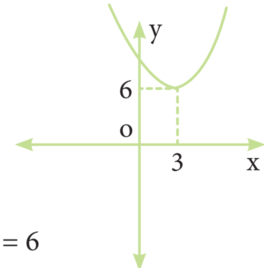


Calcula: «a.b.c»

UNI

12. Calcula el dominio máximo si se sabe que:
$F(x) = x^2 - 6x + 15$ es inyectiva.

Resolución:
Gráficamente

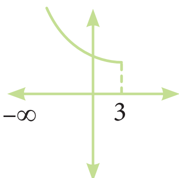


Vértice:

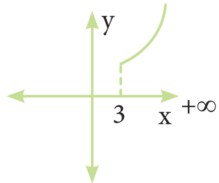
$$h = -\left(\frac{-6}{2}\right) = 3$$

$$k = F(3) = 3^2 - 6(3) + 15 = 6$$

El dominio máximo se da cuando las gráficas se separan en 2.



$\Rightarrow Dom_{max} = \langle -\infty; 3]$



$\Rightarrow Dom_{max} = [3; +\infty\rangle$

13. Calcula el dominio máximo si se sabe que:

$F(x) = x^2 + 4x + 9$ es inyectiva

14. Sea: $f\colon R \to R$

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 12; & x \leq k \\ x + 17; & x > k \end{cases}$$

calcula el valor de «k» para que f sea una función biyectiva.