FUNCIÓN INVERSA

Definiciones previas

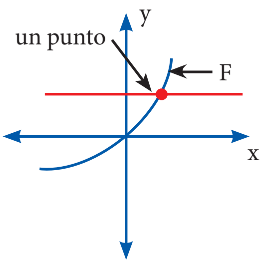
A. Función inyectiva

F es inyectiva si y solo si $x_1, x_{12} \in \text{DomF}$ con $x_1 \neq x_2 \Rightarrow F(x_1) \neq F(x_2)$

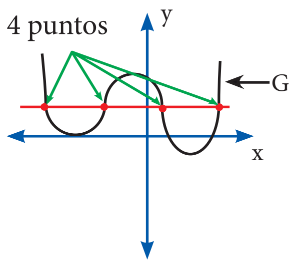
Equivalentemente:
F es inyectiva si y solo si $F(x_1) = F(x_2)$
$\Rightarrow x_1 = x_2$

Teorema

F es inyectiva si toda recta horizontal corta a su gráfica a lo más en un punto.



F es inyectiva



G no es inyectiva

B. Función suprayectiva

Llamada también sobreyectiva, epiyectiva y suryectiva.
Sea: $F: A \rightarrow B$
F es sobreyectiva si y solo si Ran F = B.
Es decir, cuando el rango de la función es igual al conjunto de llegada.

C. Función biyectiva

Una función es biyectiva si es inyectiva y suprayectiva a la vez.

Definición

Dada la función inyectiva
$F = \{(x; y) /\ y = F(x)\}$
Se defina la función inversa denotando de la siguiente manera:
$F^* = \{(y; x) / y = F(x) \wedge x \in \text{DomF}\}$

Luego tenemos:
$\text{DomF}^* = \text{RanF}\ \text{RanF}^* = \text{DomF}$
$\text{DomF}^* = \text{RanF} \wedge \text{RanF}^* = \text{DomF}$

Teorema

Una función F tiene inversa F^* si y solo si F es inyectiva.

Ejemplo:
Sea $F(x) = \dfrac{3x+1}{x-5}$; determina su inversa si existe:

1. F(x) es inyectiva

$F(x_1) = F(x_2) \Rightarrow \dfrac{3x_1+1}{x_1-5} = \dfrac{3x_2+1}{x_2-5}$

$\Rightarrow \cancel{3x_1x_2} - 15x_1 + x_2 - \cancel{5} = \cancel{3x_1x_2} - 15x_2 + x_1 - \cancel{5}$

$\Rightarrow 16x_2 = 16x_1$
$x_2 = x_1$
$\therefore$ F es inyectiva

Por lo tanto f tiene inversa f^*

2. Hallamos la inversa.

$\Rightarrow F(x) = \dfrac{3x+1}{x-5} \qquad \rightarrow y = \dfrac{3x+1}{x-5}$

$\rightarrow yx - 5y = 3x + 1$

$yx - 3x = 5y + 1$

$x = \dfrac{5y+1}{y-3}$

$F^*(x) = \dfrac{5x+1}{x-3}$

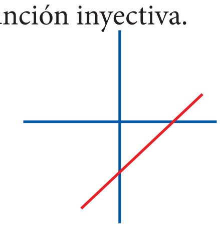
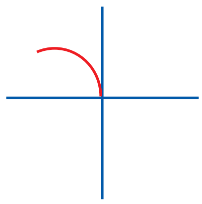
Advertencia pre

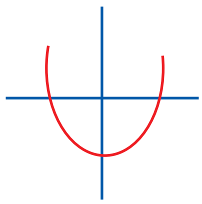
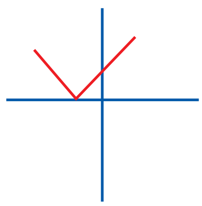
Si $F(x) = \dfrac{ax+b}{mx+n} \Rightarrow \begin{array}{l} \text{Domf} = \mathbb{R} - \{-n/m\} \\ \text{Ramf} = \mathbb{R} - \{a/m\} \end{array}$

Trabajando en clase

Integral

1. ¿Cuál de las siguientes gráficas corresponde a una función inyectiva.

I.  II. 

III.  IV. 

2. Escribe verdadero (V) o falso (F) sustentando su respuesta.
$F = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / y = 7x + 8\}$ es inyectiva
$G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / y = \sqrt{x - 3}\}$ es inyectiva
$H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / y = x^2 + 3x + 2\}$ es inyectiva
$I = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / y = |x - 3| + 5\}$ no es inyectiva

3. Determina cuál de las siguientes funciones son inyectivas:
$F = \{(1; 2), (3; 5), (1; 8), (10; 11)\}$
$G = \{(3; 1), (3; 5), (8; 1), (8; 7)\}$
$H = \{(1; 3), (8; 3), (10; 3), (5; 3)\}$
$I = \{(0; 1), (1; 2), (3; 5), (6; \pi)\}$

PUCP

4. Calcula «ab», si la siguiente función es inyectiva
$F = \{(4a - 1; 5), (3b + 7; 8), (11; 5), (13; 8)\}$
Resolución:
Como F es inyectiva:

$\Rightarrow\ 4a - 1 = 11$ $\qquad$ $\Rightarrow\ 3b + 7 = 13$
$4a = 12$ $\qquad$ $3b = 6$
$a = 3$ $\qquad$ $b = 2$

$\therefore\ ab = 6$

5. Calcula «ab», si la siguiente función es inyectiva:
$F = \{(3a - 5; 7)\ (7; 5)\ (b^3 - 1; 5)\ (4; 7)\}$

6. Si $F = [-4; 10\rangle \rightarrow [a, b\rangle$, de modo que: $F(x) = 5x - 1$, es suprayectiva. Calcula «ab».

7. Si $F: \langle -5; 3\rangle \rightarrow [m, n\rangle$, de modo que: $F(x) = x^2 - 3$, es suryectiva. Calcula «m + n».

UNMSM

8. Si $G: [-3;5\rangle \rightarrow [a, b]$ con $G(x) = x^2 - 2x + 3$ es sobreyectiva. Calcula «a + b».
Resolución:
como $x \in [-3; 5\rangle$; $G(x) = x^2 - 2x + 3$
$\Rightarrow\ (-3 \leq x < 5) - 1$; $G(x) = (x - 1)^2 + 2$
$\Rightarrow\ (-4 \leq x - 1 < 4)^2$
$(0 \leq (x - 1)^2 \leq 16) + 2$
$2 \leq (x - 1)^2 + 2 \leq 18$
$\Rightarrow G(x) \in [2; 18]\ = [a, b]$
$\Rightarrow a = 2;\ b = 18$
$\therefore\ a + b = 20$

9. Si $G: [-1; 3\rangle \rightarrow [m, n\rangle$
con $G(x) = x^2 + 4x + 1$ es suprayectiva.
Calcula «m + n».

10. Se $F:]-3; -1[\ \rightarrow\ ]m, n[$
con $F(x) = (x - 2)^2 - 3$, siendo F suprayectiva. Calcula «m·n».

11. Sea $F(x) = 5x - 8$, calcula $F^*(x)$

UNI

12. Calcula la inversa de $F(x) = \dfrac{2x - 1}{3x + 1}$ si existe, determina su dominio y rango.
Resolución:
❖ Para que F tenga inversa, verificamos que F sea inyectiva.

$$F(x_1) = F(x_2) \Rightarrow \frac{2x_1 - 1}{3x_1 + 1} = \frac{2x_2 - 1}{3x_2 + 1}$$

$$\Rightarrow\ \cancel{6x_1x_2} + 2x_1 - 3x_2 - \cancel{1} = \cancel{6x_1x_2} + 2x_2 - 3x_1 - \cancel{1}$$

$$5x_1 = 5x_2$$
$$x_1 = x_2$$

$\therefore$ F es inyectiva

❖ Determinamos su inversa

$$y = \frac{2x - 1}{3x + 1} \Rightarrow 3xy + y = 2x - 1$$

$3xy - 2x = -y - 1$

$x = \dfrac{-y - 1}{3y - 2}$

$\therefore\ F^*(x) = \dfrac{-x - 1}{3x - 2}$

$\therefore\quad DomF^* = \mathbb{R} - \left\{\dfrac{2}{3}\right\}$

$RanF^* = \mathbb{R} - \left\{-\dfrac{1}{3}\right\}$

13. Calcula la inversa de $F(x) = \dfrac{x - 2}{3x - 5}$.

Si existe, determina su dominio y rango

14. La función $F: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por lo siguiente:

$$F(x) = \begin{cases} 2x - 1; & x < k \\ x + 10; & x \geq k \end{cases}$$

Calcula «k» si F es biyectiva.