



# Materiales Educativos GRATIS

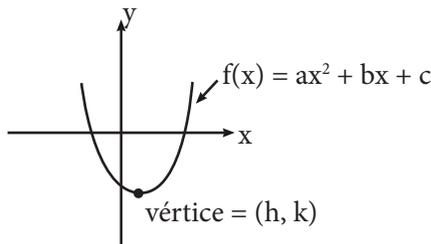
## ALGEBRA

## TERCERO

# FUNCIONES CUADRÁTICAS

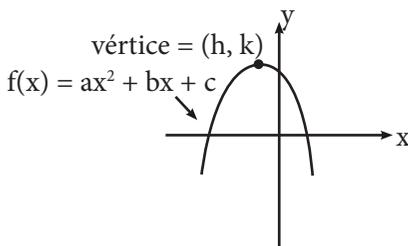
La función  $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}/y = f(x) = ax^2 + bx + c$ ;  $a \neq 0$ ,  $b, c \in \mathbb{R}$  recibe el nombre de función cuadrática.

Su gráfica es una curva llamada parábola.



La parábola se abre hacia arriba cuando  $a > 0$ . En este caso, la función tiene un mínimo valor que es igual a «k».

Su rango es  $\text{Ran}f = [k; +\infty)$



La parábola se abre hacia abajo cuando  $a < 0$ . En este caso, la función tiene un máximo valor que es igual a «k».

Su rango es  $\text{Ran}F = \{-\infty; k\}$

### Formas de calcular el vértice

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

#### A. Por fórmula

$$V = (h, k)$$

$$\text{Donde } h = -\frac{b}{2a}$$

«k» se halla reemplazando  $x = h$  en «f»

$$\Rightarrow k = a(h)^2 + b(h) + c$$

Ejemplo:

Determina el vértice de  $f(x) = x^2 + 4x + 1$ .

$$V = (h, k) \begin{cases} h = -\frac{4}{2(1)} = -2 \\ k = (-2)^2 + 4(-2) + 1 \rightarrow k = -3 \end{cases}$$

#### B. Completando cuadrados

Se debe tener en cuenta la forma  $y = a(x - h)^2 + k$ , donde  $V = (h, k)$

Ejemplo:

Determina el vértice de:

$$f(x) = x^2 + 4x + 1$$

$$f(x) = x^2 + 4x + 1 = (x + 2)^2 - 3$$

$$\text{Comparando: } y = a(x - h)^2 - 3$$

↓

$$y = 1(x + 2)^2 + k$$

$$a = 1$$

$$-h = +2$$

$$k = -3$$

$$h = -2$$

Luego,  $V = (-2; -3)$ .

### Cálculo del rango de una función cuadrática teniendo como dato el dominio

Calcula el rango de  $f(x) = x^2 + 4x + 1$  si  $x \in \{2; 5\}$

**Resolución:**

Completamos cuadrados:

$$f(x) = x^2 + 4x + 1 = (x + 2)^2 - 3$$

Debemos construir  $f(x) = (x + 2)^2 - 3$  a partir de

$$x \in \{2; 5\} \Rightarrow (2 < x \leq 5) \text{ sumo } 2$$

$$(4 < x + 2 \leq 7) \text{ elevo al cuadrado}$$

$$(16 < (x + 2)^2 \leq 49) \text{ resto } 3$$

$$13 < \underbrace{(x + 2)^2 - 3}_{f(x)} \leq 46$$

$$13 < f(x) \leq 46$$

Luego,  $f(x) \in \{13; 46\}$

$$\text{Ranf} = \{13; 46\}$$

### Puntos de intersección con los ejes coordenados

#### ► Intersección con el eje de abscisas (eje «x»)

Para determinar los puntos de intersección con el eje «x», se iguala «y» a cero ( $y = 0 \vee f(x) = 0$ ) y se calculan los valores de «x».

#### ► Intersección con el eje de ordenadas (eje «y»)

Para determinar los puntos de intersección con el eje «y», se iguala «x» a cero ( $x = 0$ ) y se calcula el valor de «y».

## Trabajando en clase

### Integral

1. Calcula el vértice de:  $f(x) = x^2 + 6x + 10$
2. Calcula la suma de componentes del vértice de la función:  $f(x) = x^2 - 8x + 17$
3. Calcula el vértice de:  $f(x) = x^2 + 5x + 1$

### PUCP

4. Calcula el rango de:  $f(x) = x^2 - 6x + 16$

#### Resolución

Calculo primero el vértice:

$$h = -\frac{(-6)}{2(1)} = \frac{6}{2} \Rightarrow h = 3$$

Luego:

$$k = f(3) = 3^2 - 6(3) + 16$$

$$k = 9 - 18 + 16$$

$$k = 7$$

$$\text{como } a = 1 > 0 \Rightarrow \text{Ranf} = [k; +\infty)$$

$$\text{Ranf} = [7; +\infty)$$

5. Calcula el rango de  $f(x) = x^2 + 10x + 26$
6. Calcula el rango de:  $f(x) = -x^2 - 4x + 21$
7. Calcula el rango de:  $f(x) = (x - 2)^2 + 5$  si  $x \in \langle 3; 6 \rangle$

### UNMSM

8. Calcula el rango de  $f(x) = x^2 + 6x + 3$  si  $x \in \langle -7; 2 \rangle$

#### Resolución:

Para calcular el rango de  $f(x) = x^2 + 6x + 3$ , teniendo como dato  $x \in \langle -7; 2 \rangle$ , completamos cuadrados.

$$f(x) = x^2 + 6x + 3 \Rightarrow f(x) = (x + 3)^2 - 6 \text{ como } x \in \langle -7; 2 \rangle \text{ construimos } \langle f(x) \rangle$$

$$-7 < x \leq 2 \quad \text{sumamos } 3$$

$$-4 < x + 3 \leq 5 \quad \text{elevamos al cuadrado}$$

$$0 \leq (x + 3)^2 \leq \text{Max.}(5^2; 4^2)$$

$$0 \leq (x + 3)^2 \leq 25$$

$$-6 \leq (x + 3)^2 - 6 \leq 19$$

$$-6 \leq f(x) \leq 19$$

$$f(x) \in [-6; 19]$$

$$\text{Ranf} = [-6; 19]$$

9. Calcula el rango de  $f(x) = x^2 + 10x + 13$  si  $x \in \langle -4; 3 \rangle$
10. Calcula el rango de  $f(x) = x^2 + 10x + 7$  si  $x \in \langle -7; -1 \rangle$
11. Calcula el rango de  $f(x) = x^2 - 6x + 2$  si  $x \in [0; 2]$

### UNI

12. Calcula los puntos de intersección de la parábola  $f(x) = x^2 + 3x - 10$  con los ejes de coordenadas.

#### Resolución:

$$\text{Sea: } f(x) = x^2 + 3x - 10$$

Intersección con el eje «x»  $y = 0$

$$x^2 + 3x - 10 = 0$$

$$\begin{array}{c} \swarrow \quad \searrow \\ x \quad \quad +5 \\ \nwarrow \quad \nearrow \\ x \quad \quad -2 \end{array}$$

$$x = -5 \vee x = 2$$

$$\text{si } y = 0 \Rightarrow x = -5 \Rightarrow \text{primer punto: } (-5; 0)$$

$$\text{si } y = 0 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow \text{segundo punto: } (2; 0)$$

Intersección con el eje «y»  $x = 0$

$$y = 0^2 + 3(0) - 10$$

$$y = 0 + 0 - 10$$

$$y = -10$$

$$\text{Si } x = 0 \Rightarrow y = -10 \Rightarrow \text{tercer punto: } (0; -10)$$

13. Calcula los puntos de intersección de la parábola:  $f(x) = x^2 - 7x + 12$  con los ejes de coordenadas.
14. Calcula los puntos de intersección con los ejes de coordenadas y la gráfica de  $f(x) = x^2 - 2x - 8$ .