FACTORIZACIÓN

Es la transformación de un polinomio, en una multiplicación indicada de sus factores primos, sobre un campo numérico.

$$x2 + 5x + 6 \underset{\xleftarrow{\text{Multiplicación}}}{\xrightarrow{\text{Factorización}}} (x + 2)(x + 3)$$

Polinomio irreductible

Es aquel que no puede ser expresado como la multiplicación de dos o más factores sobre el mismo campo numérico.

Factor primo

Es un factor irreductible de un polinomio que aparece como factor en una multiplicación indicada.

$$P(x,y) = -3a^3y^7(3y - 7)^4(2x^2 + 1)^8$$

- Factores primos: x ; y ; $3y - 7$; $2x^2 + 1$
- Factores primos lineales: x ; y ; $3y - 7$
- Factores primos cuadráticos: $2x^2 + 1$

MÉTODOS PARA FACTORIZAR POLINOMIOS

Existen diversos métodos de factorización. Veremos los más utilizados.

1. Método del factor común

Se aplica cuando todos los términos de un polinomio tienen variables y/o constantes comunes.

- $R(x) = 7x^5 + x^3$, se observa que todos los términos tienen en común a "x^2", entonces lo extraemos:

$$R(x) = \underbrace{x^3}_{\text{F.P. 1}}\ \underbrace{(7x^2 + 1)}_{\text{F.P.2}}$$

- $S(m;n) = 6m^2n - 3mn^2 + 12mn$, extraemos el factor común "3mn", asi:

$$S(m,n) = 3\ \underbrace{m}_{\text{F.P. 1}}\ .\ \underbrace{n}_{\text{F.P.2}}\ .\ \underbrace{(2m - n + 4)}_{\text{F.P.3}}$$

2. Método de agrupación

Se aplica cuando todos los términos de un polinomio no tienen factor común, por lo que agrupamos convenientemente aquellos que si lo tienen, para finalmente sacar el factor común.

- $T(a;b) = 3a^2 + 3a - 2ab - 2b$, agrupamos de 2 en 2

  $T(a;b.) = 3a(a + 1) - 2b(a + 1)$, extraemos el factor $a + 1$

$$T(a;b) = \underbrace{(a + 1)}_{\text{F.P.1}}\underbrace{(3a - 2b)}_{\text{F.P.2}}$$

3. Método de identidades

Usaremos las identidades de los productos notables para factorizar

$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$
$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$
$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$

- $$P(x) = \underbrace{4x^2}_{\underbrace{\sqrt{\ }}_{2x}} - \underbrace{9}_{\underbrace{\sqrt{\ }}_{3}} = \underbrace{(2x + 3)}_{\text{F.P.1}}\underbrace{(2x - 3)}_{\text{F.P.2}}$$

- $$P(x) = \underbrace{x^4}_{\underbrace{\sqrt{}}_{x^2}} - \underbrace{1}_{\underbrace{\sqrt{}}_{1}} = (x^2 + 3)(\underbrace{x^2}_{\underbrace{\sqrt{}}_{x}} - \underbrace{1}_{\underbrace{\sqrt{}}_{1}})$$
$$= \underbrace{(x^2 + 1)}_{\text{F.P.1}}\underbrace{(x + 1)}_{\text{F.P.2}}\underbrace{(x - 1)}_{\text{F.P.3}}$$

- $$P(x) = \underbrace{x^3}_{\underbrace{\sqrt[3]{}}_{x}} - \underbrace{8}_{\underbrace{\sqrt[3]{}}_{2}} = \underbrace{(x - 2)}_{\text{F.P.1}}\underbrace{(x^2 + 2x + 4)}_{\text{F.P.2}}$$

4. Método del aspa simple

Se aplica cuando los polinomios a factorizar son de la forma:

$$\boxed{P(x) = ax^{2n} + bx^n + c}$$

ó

$$\boxed{P(x;y) = ax^{2n} + bx^m y^n + cy^{2n}}$$

Procedimiento:

1. Se descomponen adecuadamente los extremos del trinomio.
2. Se comprueba que el término central es igual a la suma de los productos en aspa.
3. El trinomio es expresado como la multiplicación de factores que se toman en forma horizontal.
   - $$P(x;y) = 12x^2 + 7xy - 10y^2 =$$
     $$\begin{array}{lll} 4x & -3y \rightarrow & 15x\ + \\ 3x & +2y \rightarrow & \underline{-8x} \\ & & \ \ 7x \end{array}$$
     $$P(x;y) = \underbrace{(4x + 5y)}_{\text{F.P.1}}\underbrace{(3x - 2y)}_{\text{F.P.2}}$$

5. Método del aspa doble

Se aplica cuando los polinomios a factorizar son de la forma:

$$\boxed{P(;y) = ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f}$$

Procedimiento:

1. Se adecua el polinomio a la forma general y, en caso falten términos, se completan con ceros.
2. A los tres primeros términos se les aplica aspa simple, y también a los términos 3º, 5º y 6º.
3. Se aplica un aspa simple de comprobación a los términos 1º, 4º y 6º.
4. El trinomio es expresado como la multiplicación de factores que se toman en forma horizontal.
   - $$P(x;y) = x^2 - xy - 6y^2 + 7x - 11y + 10$$
     $$\begin{array}{lll} x & -3y & +2 \\ x & +2y & +5 \end{array}$$
     $$P(x;y) = \underbrace{(x - 3y + 2)}_{\text{F.P.1}}\underbrace{(x + 2y + 5)}_{\text{F.P.2}}$$

6. Método del aspa doble especial

Se aplica cuando los polinomios a factorizar son de la forma:

$$\boxed{P(;y) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e}$$

Procedimiento:

1. Se adecua el polinomio a la forma general y, en caso falten términos, se completan con ceros.
2. Se descomponen convenientemente los extremos, se multiplican en aspa y se suman los productos obtenidos.
3. El resultado anterior se compara con el término central y lo que falta para que sea igual a este es la expresión a descomponer en las partes centrales de los nuevos factores.
4. Se verifica en aspa simple en cada lado. Los factores se toman en forma horizontal, y si estos no son primos, se factorizan por aspa simple
   - $$P(x) = x^4 - 6x^3 + 7x^2 - 6x + 1$$
     $$\begin{array}{lll} x^2 & -5x & +1 \\ x^2 & -1x & +1 \end{array}$$
     Se debe tener: $7x^2$

     Se tiene: $2x^2$

     Falta: $+5x^2$

     $$P(x) = \underbrace{(x^2 - 5x + 1)}_{\text{F.P.1}}\underbrace{(x^2 - x + 1)}_{\text{F.P.2}}$$

7. Método de los divisores binómicos

Se utiliza para factorizar polinomios de cualquier grado, generalmente de una sola variable y que admitan factores lineales:

$$ax \pm b \ \text{ ó } \ x \pm a$$

RAÍZ DE UN POLINOMIO

Dado un polinomio P(x) no constante, es una raíz del polinomio P(x), si y solo si P(a) = 0

Ejemplo:

$P(x) = x^3 + 3x - 4$
Si $x = 1$, $P(1) = 1^3 + 3 - 4 = 0$
Entonces: x = 1 es una raíz de P(x)

Regla para calcular las posibles raíces racionales de un polinomio

$$\boxed{PRR = \left\{\frac{\text{divisores de Term. Independiente}}{\text{divisores de Coef. Principal}}\right\}}$$

Ejemplo: $P(x) = x^3 - 11x^2 + 31x - 21$

$$PRR = \pm\left\{\frac{1;3;7;21}{1}\right\} = \pm\{1; 3; 7; 21\}$$

Para x = 3, P(x) = 0; entonces un factor será x – 3

	1	–11	31	–21
x = 3		3	–24	+21
	1	–8	7	0

$P(x) = (x^2 - 8x + 7)(x - 3)$
$\quad x \quad -7$
$\quad x \quad -1$
$P(x) = (x - 7)(x - 1)(x - 3)$

Trabajando en clase

Integral

1. Indica la cantidad de factores primos de los siguientes polinomios:
$P(x; y; z) = -3^{a2}x^3y^5(2x - 7)^2$
$P(m;n) = \sqrt{2}\, m^3n^2(m-1)^7(m-n)^9(p-5)^{10}$

2. Factoriza:
a) $P(x;y) = 3y(x-7) + (7-x) + 5y(x-7)$
b) $S(x) = x^3 + y^2 + 2x + 2$

3. Factoriza:
a) $P(x) = 4x^2 - 25$
b) $Q(y) = 8y^3 + 1$

PUCP

4. Factoriza: $6x^2 - 13x - 15$

Calcula

a) La cantidad de factores primos.

b) La suma de factores primos

Resolución:

El método a emplear para factorizar es el de "sapa simple".

La expresión factorizada será:

$$\begin{array}{lll} 6x^2 & -13x & -15 \\ 6x & & +5 = +5x \\ x & & -3 = \underline{-18x} \\ & & \qquad -13x \end{array}$$

La expresión factorizada será:

$$\underbrace{(6x + 5)}_{\text{F.P.1}}\underbrace{(x - 3)}_{\text{F.P.2}}$$

$\Sigma Coef_1 = 11 \qquad \Sigma Coef_2 = -2$

∴ a) La cantidad de FP es 2

b) La suma de FP es 7x + 2

5. Factoriza: $2x^2 - x - 3$

Y da como respuesta la suma de los coeficientes de uno de dichos factores.

(CEPREPUC 2013)

6. Factoriza: $x^4 - 41x^2 + 400$

la suma de factores primos obtenidos.

(CEPREPUC 2013)

7. Al factorizar $12x^2 - 8x - 15$, se obtuvo $(Ax \downarrow B)(Cx \uparrow D)$, donde A, B, C y D son números enteros positivos. Calcula el valor de:

$(A \uparrow B) \downarrow (C \uparrow D)$ con A > C

UNMSM

8. Factoriza y señala la suma de los factores primos del siguiente polinomio

$P(x;y) = 3x^2 + 8y^2 - 14x + 22y + 15 - 10xy$

Resolución:

Adecuamos el polinomio a la forma general:

$P(x;y) = 3x^2 - 10xy + 8y^2 - 14x + 22y + 15$

$$\begin{array}{cccc} 3x & -4y & -5 \\ x & -2y & -3 \end{array}$$

Luego: $P(x;y) = (3x - 4y - 5)(x - 2y - 3)$

$\therefore$ La $\sum$ factores primos es:

$3x - 4y - 5 + x - 2y - 3 = 4x - 6y - 8$

9. Factoriza y señala la suma de los factores primos:
$12x^2 + 5xy + 14x + 17y - 3y^2 - 10$

10. Se descompone: $a^3 - ab^2 + a^2b - b^3 + a^2 - b^2$ en factores lineales. Halla la suma de dichos factores.
(UNMSM 2004 – II)

11. Halla el número de factores primos del polinomio:
$P(x) = x^5 + x^4 + x^3 - x^2 - x - 1$

UNI

12. Luego de factorizar:
$P(x) = 3x^3 + 11y^2 + 17x + 6$
Indica la cantidad de factores primos lineales.
(CEPREIUNI)

Resolución:

Por divisores binómicos

Coef. princ. = 2

$$PC = \pm\left\{\frac{1;2;3;6}{1;2}\right\} = \pm\left\{1;2;3;6;\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right\}$$

Tenemos

	2	11	17	6
X = –2		–4	–14	–6
	2	7	3	0

$P(x) = (x + 2)(2x^2 + 7x + 3)$

Observa que:

$$\begin{array}{ccc} 2x^2 & + 7x & + 3 \\ 2x & & +1 \\ x & & +3 \end{array}$$

se puede seguir factorizando

Entonces:

$$P(x) = \underbrace{(x+2)}_{FP1}\underbrace{(2x+1)}_{FP2}\underbrace{(x+3)}_{FP3}$$

$\therefore$ La cantidad de FP lineales es 3.

13. Factoriza:
$2x^3 - 3x^2 - 11x + 6$
Y señala cantidad de factores primos lineales.

14. Calcula la suma de los términos independientes de todos los factores primos del polinomio:
$P(x) = 6x^4 + 5x^3 + 6x^2 + 5x + 6$
(CEPREUNI)