



FACTORIAL DE UN NÚMERO NATURAL

Sea $n \in \mathbb{N}$, se llama $n!$ («factorial de n »; no se debe leer « n factorial»), al producto de todos los números naturales de orden decreciente desde n , hasta 1.

En símbolos:

$$n! = n \cdot (n - 1)(n - 2) \dots 3 \cdot 2 \cdot 1$$

Ejemplo:

$$5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$$

Por convención: $0! = 1$

Propiedades del factorial

$$\begin{aligned} n! &= n(n - 1)! \\ &= n(n - 1)(n - 2)! \end{aligned}$$

Ejemplo:

$$5! = 5 \times 4! = 5 \times 4 \times 3!$$

O bien: $(n + 1)! = (n + 1)n!$

Permutaciones

1. Si se establece o se acepta que en cada grupo deben intervenir todos los elementos dados, los grupos solo pueden diferir en el orden de los elementos y reciben el nombre de «permutaciones».

2. Su cantidad está dada por:

$$P_n = n!$$

Las permutaciones son un caso particular de arreglos.

Permutaciones circulares

Se utilizan cuando los elementos se han de ordenar «en círculo», (por ejemplo, los comensales en una mesa), de modo que el primer elemento que “se sitúe” en la muestra determina el principio y el final de muestra.

$$PC_n = P_{n-1} = (n - 1)!$$

Permutaciones con repetición

Permutaciones con repetición de m elementos donde el primer elemento se repite a veces, el segundo b veces, el tercero c veces, ... ($m = a + b + c + \dots = n$) son los distintos grupos que pueden formarse con esos m elementos de forma que:

- ❖ Si entran todos los elementos.
- ❖ Si importan el orden.
- ❖ Si se repiten los elementos.

$$P_n^{a,b,c,\dots,k} = \frac{n!}{a! \cdot b! \cdot c! \cdot \dots \cdot k!}$$

Trabajando en clase

Integral

1. Reduce la siguiente expresión.

$$\frac{100!}{99!} + \frac{100!}{98!} + \frac{8!}{6!}$$

2. Determinar el valor de «a».

$$\frac{12!}{11!} + \frac{(a + 2)!}{(a + 1)!} - \frac{(a + 1)!}{a!}$$

3. Determinar el valor de «P».

$$P = \sqrt{\sqrt{2! + \sqrt{2! + \sqrt{2!} \dots}}}$$

Católica

4. Se quiere sentar 5 hombres y 4 mujeres en una fila de modo que las mujeres ocupen sitios pares. ¿De cuántas formas pueden sentarse?

Resolución:

Los hombres y las mujeres se ubicarían de la siguiente manera:

$$H - M - H - M - H - M - H - M - H$$

Son cinco hombres para cinco lugares y cuatro mujeres para cuatro lugares, entonces claramente vemos que tenemos que permutar.

$$P_5 \times P_4 = 5! \times 4! = 120 \times 24 = 2880$$

- ¿De cuántas formas diferentes se podrían ubicar en una fila de siete asientos numerados de 1 al 7, 4 mujeres y 3 varones, si estos deben ocupar los lugares pares?
- Se tienen 9 banderillas donde 2 son blancas, 3 son rojas y 4 son negras. ¿De cuántas maneras se pueden hacer señales poniendo todas las banderas en fila?
- Con las letras de la palabra «EDITOR», ¿Cuántas palabras de 6 letras que terminen en «E» se pueden formar?

UNMSM

- Calcule el número de arreglos diferentes que se puede formar con todas las letras de la palabra «CATARATA».

Resolución:

Para este problema usamos permutación porque son ocho letras para ocho lugares pero como hay elementos repetidos usaremos permutación con repetición.

$$P_{4,2}^9 = \frac{8!}{4! \times 2!} = 840$$

- Con las letras de la palabra PAPAYA, ¿cuántas palabras distintas (con o sin sentido) se pueden formar?

- En una reunión hay 4 peruanos, 2 colombianos y 3 argentinos. ¿De cuántas maneras diferentes se pueden ubicar en una fila de modo que los de la misma nacionalidad se sienten juntos?
- Con todas las letras de la palabra AMARRAS, ¿cuántas palabras diferentes se pueden formar, sin importar lo que diga, si en ningún caso la «M» y la «S» deben estar juntas?

UNI

- ¿De cuántas formas pueden sentarse 7 personas alrededor de una mesa, si dos personas determinadas no deben estar una al lado de la otra?

Resolución:

Calculamos la cantidad de formas totales y sin condiciones en que se pueden sentar las 7 personas.

$$PC7 = (7 - 1)! = 6! = 720$$

Ahora calculamos la cantidad de formas en que se pueden comprar cuando las dos personas están juntas.

$$PC6.P2 = (6 - 1)! \times 2! = 120 \times 2 = 240$$

Por diferencia calculamos la cantidad de formas en que estas dos personas no se sientan juntas.

$$720 - 240 = 480$$

- ¿De cuántas maneras podrán ubicarse 10 niños tomados de la mano, si quieren jugar a la ronda, además pepito y cuchita quieren estar siempre juntos?
- ¿Cuántas permutaciones pueden realizarse con las letras de la palabra INGENIERÍA?