EJERCICIOS DE TEORÍA DE ECUACIONES

Ecuaciones polinomiales

Dado el polinomio:

$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_1 x + a_0;\ a_n \neq 0$

tenemos, entonces, la ecuación polinomial:

$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0$

Teorema fundamental del álgebra

Todo polinomio:

$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_1 x + a_0\ ;\ a_n \neq 0$

puede ser descompuesto en «n» factores de grado 1, esto es:

$P(x) = a_n(x - r_1)(x - r_2)\ \ldots\ (x - r_n)$, donde $r_1; r_2; r_3; \ldots; r_n$ son raíces de $P(x)$.

Nada impide que haya factores iguales, lo cual originaría que haya raíces iguales. Por lo tanto:

$$\boxed{\text{N.º soluciones} \leq \text{N.º raíces}}$$

Multiplicidad de raíces

Considerando la ecuación polinomial:

$(x - 5)^3\ (x + 3)^2(x - 7) = 0$; se observa que hay tres raíz 5, dos raíz -3 y una raíz 7. Entonces diremos que 7 es una raíz simple, -3 es una raíz doble y 5 es una raíz triple.

Defnción:

Diremos que r es una raíz de multiplicidad m, $m \geq 1$, de la ecuación polinomial $p(x) = 0$ solamente si $P(x) = (x - r)^m\ Q(x)$, donde $Q(r) \neq 0$.

Teorema de Cardano

Conste en la recopilación de las relaciones que hay entre las raíces de la ecuación $P(x) = 0$ y sus respectivos coeficientes.

Dada la ecuación:

$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0;\ a_n \neq 0$

Cuyas raíces son $r_1; r_2; r_3; r_4; \ldots ; r_n$; tenemos:

a) Suma de raíces:

$$r_1 + r_2 + r_3 + \ldots + r_{n-1} + r_n = -\frac{a_{n-1}}{a_n}$$

b) Suma de productos binarios:

$$r_1 \cdot r_2 + r_1 \cdot r_3 + r_1 \cdot r_4 + \ldots + r_{n-1} \cdot r_n = \frac{a_{n-2}}{a_n}$$

c) Suma de productos ternarios:

$$r_1 r_2 r_3 + r_2 r_3 r_4 + \ldots + r_{n-2} r_{n-1} r_n = -\frac{a_{n-3}}{a_n}$$

$\vdots$

d) Producto de raíces:

$$r_1 r_2 r_3 \ldots r_{n-1} r_n = (-1)^n \cdot \frac{a_o}{a_n}$$

Teorema de paridad de raíces

- Teorema 1

  $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_1 x + a_o\ ;\ a_n \neq 0$

  si $a_{n1}, a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots, a_1; a_0 \in \mathbb{Q}$; se cumple que si la ecuación tiene una raíz de la forma $a + \sqrt{b}$ ($\sqrt{b} \notin \mathbb{N}$), entonces la otra raíz será $a - \sqrt{b}$, llamada conjugada.

- Si la ecuación polinomial

  $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_o;\ a_n \neq 0$; si $a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots, a_1, a_o \in \mathbb{R}$, se cumple que la ecuación admite como raíz al número $Z = \alpha + \beta i$; $(B \neq 0)$ entonces admite como raíz al número $\overline{Z} = \alpha - \beta i$, llamado el conjugado de Z.

Recuerda

Si $5 - \sqrt{7}$ es raíz de la ecuación entonces $5 + \sqrt{7}$ también será raíz de la ecuación

Trabajando en clase

Integral

1. Encuentra las relaciones que hay entre los coeficientes de la siguiente ecuación polinomial y sus raíces.
$3x^4 - 5x^3 + 2x^2 - 7x + 3 = 0$
- $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 =$
- $x_1 x_2 + x_2 x_3 + \ldots + x_3 x_4 =$
- $x_1x_2x_3 + \ldots + x_2 x_3 x_4 =$
- $x_1x_2x_3x_4 =$

2. Si $x^4 - 3x^3 + 2x - 2 = 0$
A = suma de productos binarios
B = suma de productos ternarios
calcula: A + B

3. Si $3x^5 - 2x^4 + x^3 - 7x^2 - 10x + 6 = 0$,
calcula: $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_1x_2x_3x_4x_5$

PUCP

4. Si una raíz de $2x^3 - mx^2 + nx + 16 = 0$ es $1 - \sqrt{2}$, calcula la raíz entera.
Resolución:
Como una raíz es $x_1 = 1 - \sqrt{2}$
$\rightarrow x_2 = 1 + \sqrt{2}$
$x_3 = ??$
$\rightarrow \overset{+}{2x^3} - \overset{-}{mx^2} + \overset{+}{nx} + \overset{-}{16} = 0$
Observando los datos, aplicaremos productos de raíces.
$$x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 = -\frac{16}{2}$$
$$(1-\sqrt{2})(1+\sqrt{2})\,x_3 = -8$$
$$(1^2 - \sqrt{2}^{\,2}) \cdot x_3 = -8$$
$$(1-2) \cdot x_3 = -8$$
$$-x_3 = -8$$
$$x_3 = 8$$

5. Si una raíz de $7x^3 - px^2 + qx - 21 = 0$ es $2 + \sqrt{3}$, determina la raíz entera.

6. Si una raíz de $5x^3 - 10x^2 + bx + a = 0$ es $3i + 2$, determina la raíz real.

7. Calcula la tercera raíz en $2x^3 - 8x^2 + mx - n = 0$, si $x_1 + x_2 = 3$.

UNMSM

8. Resuelve la ecuación:
$x^7 - 3x^6 + 8x^5 - 7x^4 - 2x^3 + 5x^2 - 8x - 1 = 0$, sabiendo que $1 + i$ es una raíz de la ecuación y de multiplicidad 3. Da como respuesta la raíz real.
Resolución:
$x_1 = 1 + i \xrightarrow{\text{conjugada}} x_4 = 1 - i$
$x_2 = 1 + i \xrightarrow{\text{conjugada}} x_5 = 1 - i$
$x_3 = 1 + i \xrightarrow{\text{conjugada}} x_6 = 1 - i$
Calculamos la suma de raíces:
$$1+i+1+i+1+i+1-i+1-i+1-i+x_7 = -\frac{(-3)}{1}$$
$$6 + x_7 = 3$$
$$x_7 = -3$$

9. Calcula la raíz real en:
$7x^7 - 21x^6 + 2x^5 - 3x^4 - 8x^3 + 5x^2 - 10x - 2 = 0$
si $2 - 4i$ es una raíz de multiplicidad 3.

10. Calcula el valor de «x» en:
$$\sqrt{2x - \sqrt{x-4}} - \sqrt{x+4} = 0$$

11. Calcula la suma de las raíces de la ecuación:
$\sqrt{x-1} = \sqrt{3\sqrt{x-1}}$,
UNMSM 2005 – I

UNI

12. La ecuación: $x^3 - x + 2 = 0$ posee raíces: $x_1; x_2; x_3$.
Calcula: $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3$
Resolución:
$\overset{+}{x^3} + \overset{-}{0x^2} \overset{+}{-x} + \overset{-}{2} = 0$
Por método Cardamo: $x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{(0)}{1}$
$$x_1 + x_2 + x_3 = 0$$
$\Rightarrow x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = 3x_1 x_2 x_3$ (identidad condicional)
$$= 3 \cdot \frac{(-2)}{1}$$
$$x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = -6$$

13. La ecuación $2x^3 - 4x + 6 = 0$ tiene raíces $x_1; x_2; x_3$.
Calcula: $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3$

14. Si la ecuación $2x^2 + mx + 30 = 0$ y sus raíces son x_1 y x_2, ¿para qué valores de «m» se cumple la relación $\frac{x_1}{x_2} = \frac{3}{5}$?
UNI 2001 – I