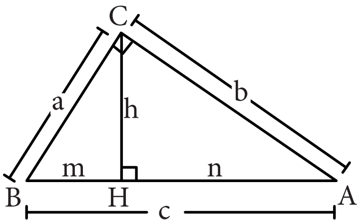
EJERCICIOS DE RELACIONES MÉTRICAS EN EL TRIÁNGULO RECTÁNGULO

Elementos de un triángulo rectángulo

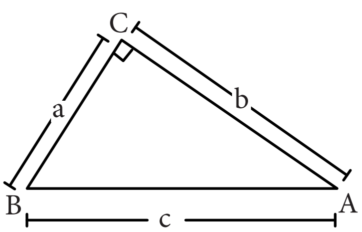


- a y b son las longitudes de los catetos $\overline{BC}$ y $\overline{AC}$.
- c es la longitud de la hipotenusa $\overline{AB}$.
- $\overline{CH}$ es la altura relativa a la hipotenusa, de medida h.
- m es la longitud de la proyección del cateto $\overline{BC}$ sobre la hipotenusa.
- n es la longitud de la proyección del cateto $\overline{AC}$ sobre la hipotenusa.

Los siguientes teoremas nos describen las principales relaciones que hay entre las longitudes de los lados, altura y proyecciones de un triángulo rectángulo.

a) Teorema 1(teorema de Pitágoras)

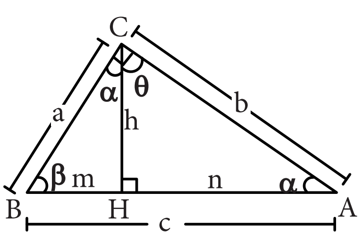
En todo triángulo rectángulo, la suma de los cuadrados de los catetos es igual al cuadrado de la hipotenusa.



$$\boxed{a^2 + b^2 = c^2}$$

b) Teorema 2

En todo triángulo rectángulo, el cuadrado de un cateto es igual al producto de su proyección por la hipotenusa.



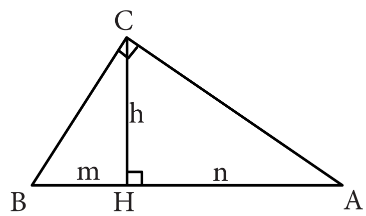
Se cumple:

$$\boxed{a^2 = m.c}$$

$$\boxed{b^2 = n.c}$$

c) Teorema 3

En todo triángulo rectángulo, el cuadrado de la altura relativa a la hipotenusa es igual al producto de las proyecciones de los catetos sobre la misma.

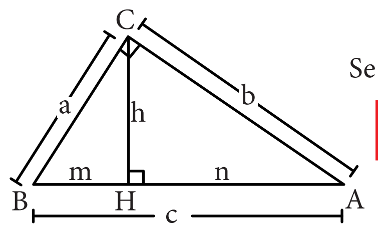


Se cumple:

$$\boxed{h^2 = m.n}$$

d) Teorema 4

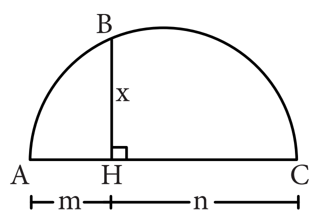
En todo triángulo rectángulo, el producto de catetos es igual al producto de la hipotenusa por su altura relativa.



Se cumple:

$$\boxed{a.b = c.h}$$

Observación



Se cumple:

$$\boxed{x^2 = mn}$$

$\overline{AC}$: Diámetro

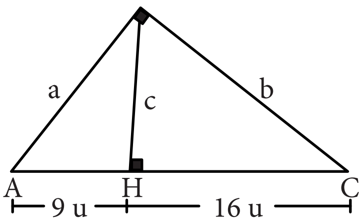
Advertencia pre

En los exámenes de admisión de la Universidad Nacional Mayor de San Marcos son muy frecuentes los problemas de aplicación de el teorema de Pitágoras y el teorema de las proyecciones.

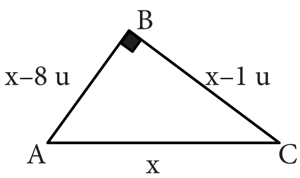
Trabajando en clase

Integral

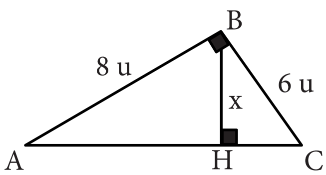
1. Calcula a + b + c.



2. Calcula "x".

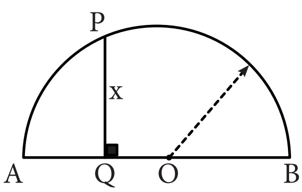


3. Calcula "x".



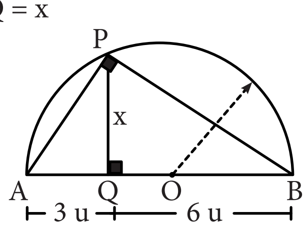
PUCP

4. Calcula PQ si AQ = 3 u y QB = 6 u.



Resolución:

Piden PQ = x



Trazamos $\overline{PA}$ y $\overline{PB}$

$m\angle APB = 90°$

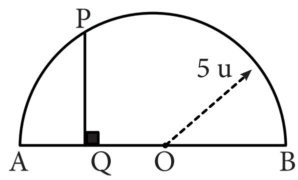
Por el teorema 3:

$x^2 = 3(6) = 18$

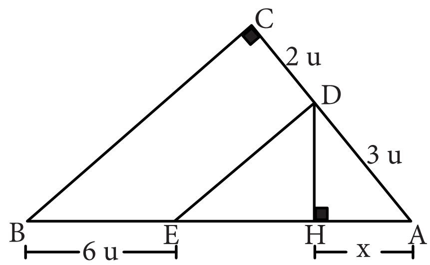
$x = \sqrt{18} = \sqrt{9\times2}$

$\boxed{x = 3\sqrt{2}\ u}$

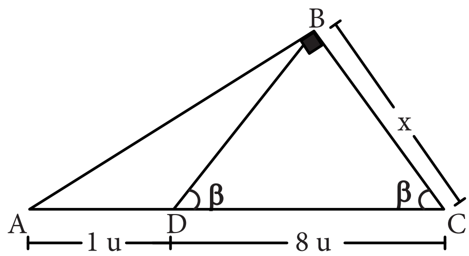
5. Calcula PQ si AQ = 2 u.



6. Calcula "x" si $\overline{BC}//\overline{ED}$.

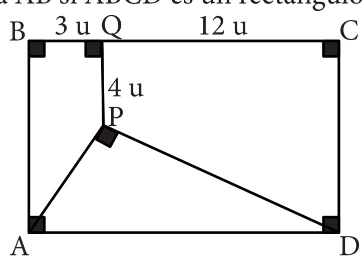


7. Calcula "x".

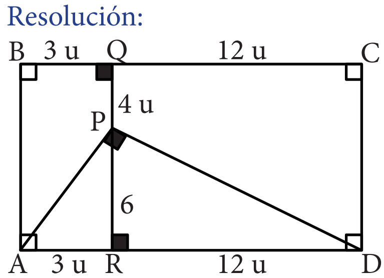


UNMSM

8. Calcula AB si ABCD es un rectángulo.



Resolución:



Nos piden AB

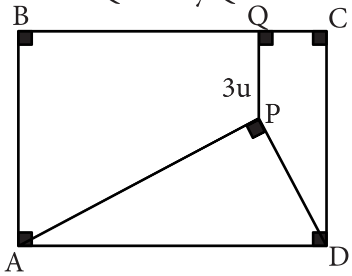
Prolongamos $\overline{QP}$ sobre $\overline{AD}$ ($\overline{PR}\perp\overline{AD}$.)

BQ = AR = 3 u $\Rightarrow$ QC = RD = 12 u

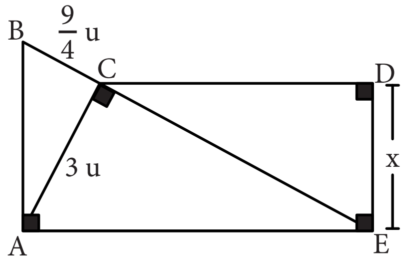
Por el teorema 3: $PR^2 = 3\times12 \Rightarrow PR = 6$ u

AB = 4 + 6 $\Rightarrow$ $\boxed{AB = 10\ u}$

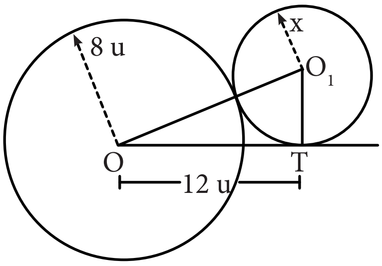
9. Calcula CD si BQ = 8 u y QC = 2 u.



10. Calcula "x".

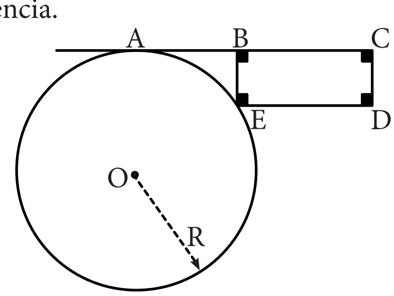


11. Calcula "x", si O y O_1 son centros de las circunferencias y T es punto de tangencia.

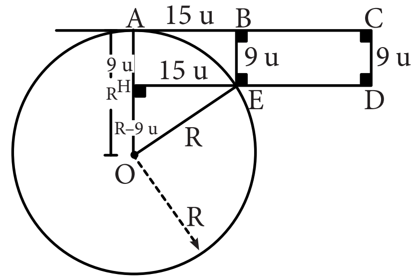


UNI

12. Calcula R si AB = 15 u, CD = 9 u y A es punto de tangencia.



Resolución:



Trazamos $\overset{\frown}{OA} \perp \overset{\frown}{AB}$

OA = R

Trazamos

$\overline{EH} \perp \overline{OA}$

AH = BE = CD = 9 u

AB = HE = 15 u

OH = R – 9 u

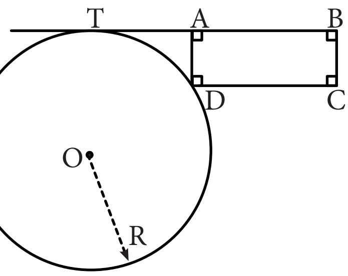
$\triangle$EHO: $R^2 = 152 + (R - 9)^2$

$\cancel{R^2} = 225 + \cancel{R^2} - 18R + 81$

$18R = 306$

$\boxed{R = 17 \text{ u}}$

13. Calcula R, si AT = 12 u, BC = 8 u y T es punto de tangencia.



14. Calcula R si EB = 8 u, BF = 12 u y F es punto de tangencia.