EJERCICIOS DE OPERACIONES CON MATRICES

OPERACIONES CON MATRICES

Adición de matrices

Sean las matrices $A = (a_{ij})_{m\times n} \wedge B = (b_{ij})_{m\times n}$

$$A + B = (a_{ij})_{m\times n} + (b_{ij})_{m\times n} \Rightarrow A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{m\times n}$$

Importante

Para que exista la suma de A y B estas deben de tener el mismo orden:

Se suma:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 8 & 7 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$A + B = \begin{pmatrix} 1-2 & 4-1 \\ 8+2 & 7+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 10 & 11 \end{pmatrix}$$

Multiplicación de matrices

A. Multiplicación de un escalar por una matriz

Cuando un escalar (número real o constante) multiplica a una matriz cada elemento de la matriz queda multiplicado por dicho escalar.

$$\text{Sea } A = (a_{ij})_{m\times n} \Leftrightarrow kA = (ka_{ij})_{m\times n}$$

donde «k» es un escalar.

Ejemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -5 & 8 \\ 1 & -1 & -3 \end{pmatrix}_{2\times 3} \Rightarrow 3A = \begin{pmatrix} 2(3) & -5(3) & 8(3) \\ 1(3) & -1(3) & -3(3) \end{pmatrix}_{2\times 3}$$

$$\Rightarrow 3A = \begin{pmatrix} 6 & -15 & 24 \\ 3 & -3 & -9 \end{pmatrix}_{2\times 3}$$

B. Multiplicación de una matriz fila por una matriz columna

$$A = (a_1 a_2 a_3 \ldots a_n)_{1\times n} \text{ y } B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}_{n\times 1}$$

Definimos:

$A.B = (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 + \ldots + a_nb_n)_{1\times 1}$

Es decir que A.B es un número real.

Ejemplo:

Se multiplican: $A = (2 \quad 3 \quad -4)$ y $B = \begin{pmatrix} 6 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix}$

$A.B = 2(6) + 3(-4) + (-4)(5)$

$A.B = -20$

C. Multiplicación de dos matrices

Dadas dos matrices $A = (a_{ij})_{m\times n}$; $B = (b_{ij})_{n\times p}$ existe una tercera matriz $C = (c_{ik})_{m\times p}$ que representa el producto de multiplicar las matrices A y B; donde c_{ik} es el producto de multiplicar la fila «i» de la primera matriz por la columna «k» de la segunda matriz.

Importante:

La multiplicación de la matriz A y B existe si y solo si el número de columas de la primera matriz es igual al número de filas de la segunda matriz.

Ejemplo:

Se multiplican:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & -3 \end{pmatrix}_{2\times 3} \text{ y } B = \begin{pmatrix} -1 & -3 & 2 \\ 2 & 5 & 0 \\ -6 & 1 & -4 \end{pmatrix}_{3\times 3}$$

 # de columnas de A = #filas de B

La matriz C que es el producto de A.B será de orden 2×3 de la siguiente forma:

$$C = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \end{pmatrix}_{2\times 3}$$

Calculamos cada uno de los elementos de C.

$$C_{11} = (2 \;\; 1 \;\; -1)\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix} = 2(-1) + 1(2) + (-1)(-6) = 6$$

$$C_{12} = (2 \;\; 1 \;\; -1)\begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} = 2(-3) + 1(5) + (-1)(1) = -2$$

$$C_{13} = (2 \;\; 1 \;\; -1)\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} = 2(2) + 1(0) + (-1)(-4) = 8$$

$$C_{21} = (0 \;\; 4 \;\; -3)\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix} = 0(-1) + 4(2) + (-3)(-6) = 26$$

$$C_{22} = (0 \;\; 4 \;\; -3)\begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} = 0(-3) + 4(5) + (-3)(1) = 17$$

$$C_{23} = (0 \;\; 4 \;\; -3)\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} = 0(2) + 4(0) + (-3)(-4) = 12$$

$$\text{Luego: } C = \begin{pmatrix} 6 & -2 & 8 \\ 26 & 17 & 12 \end{pmatrix}_{2\times 3}$$

Potenciación de matrices

Sea A una matriz cuadrada de orden $k \in \mathbb{N}$, definimos:

$$A^n = \begin{cases} I;\ n = 0;\ A \neq 0 \\ A;\ n = 1 \\ \underbrace{A \bullet A \bullet A \ldots A}_{\text{«n» veces}};\ n \in \mathbb{N};\ n \geq 2 \end{cases}$$

Ejemplo:

Si $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}$

entonces A^2 es: $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -2 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -6 \\ 4 & 10 \end{pmatrix}$

Trabajando en clase

Integral

1. Si:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 8 \\ -1 & 4 & -7 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 5 & -6 & -2 \\ 3 & 6 & 4 \end{pmatrix}$$

Calcula A + B.

2. Si:

$$C = \begin{pmatrix} 8 & 4 & 2 \\ 0 & -2 & 3 \\ \frac{1}{2} & 4 & -3 \end{pmatrix} \text{ y } D = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 3 \\ -3 & 6 & -5 \\ \frac{3}{2} & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Calcula: C + D.

3. Dada las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 4 & -5 \end{pmatrix}$$

Calcula A – B.

Católica

4. Si:

$$x + y = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 4 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \wedge x - y = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -2 & 1 \\ 7 & -10 \end{pmatrix}$$

Calcula x^T.

Resolución:

❖ Considerando análogamente a un sistema de ecuaciones:

$$x + y = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 4 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$x - y = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -2 & 1 \\ 7 & -10 \end{pmatrix}$$

ΣM.A.M

$$2x = \begin{pmatrix} 0 & 8 \\ 2 & 2 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{2}.2x = \begin{pmatrix} 0 & 8 \\ 2 & 2 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}\frac{1}{2}$$ Multiplicación ambos miembros por «$\frac{1}{2}$»

$$x = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \qquad \therefore x^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

5. Si:

$$x + y = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 6 & -7 \\ -5 & 1 \end{pmatrix} \wedge x - y = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 2 & 1 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$$

Calcula y^T.

6. Dada la matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -3 & 5 \\ 2 & 10 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ -5 & 12 \end{pmatrix}$$

Calcula 3A – B + 2C + 3I.

7. Resuelve:

$$\begin{pmatrix} 3 & -8 \\ 4 & 7 \end{pmatrix} = x + \begin{pmatrix} 6 & 9 \\ -7 & 1 \end{pmatrix}$$

Indica como respuesta la suma de elementos de «x».

UNMSM

8. Si:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -3 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Calcula AB.

Resolución:

❖ Selecciona «fila» y «columna» de las matrices A y B respectivamente para multiplicar y posteriormente sumar los productos indicados:

$$A \times B = \begin{bmatrix} (1\ \ -1\ \ 1) & \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} & ..... & ..... \\ ..... & ..... & ..... & ..... \\ ..... & ..... & ..... & ..... \end{bmatrix}_{3\times 3}$$

$$A \times B = \begin{bmatrix} 1 + -2 + 1 & ..... & ..... & ..... \\ ..... & ..... & ..... & ..... \\ ..... & ..... & ..... & ..... \end{bmatrix}_{3\times 3}$$

$$A \times B = \begin{bmatrix} 0 & ..... & ..... & ..... \\ ..... & ..... & ..... & ..... \\ ..... & ..... & ..... & ..... \end{bmatrix}_{3\times 3}$$

y A si en forma análoga hasta completar los nueve elementos de la matriz A × B.

$$\therefore\ AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

9. Si:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -3 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Calcula BA.

10. Si:

$$A = \begin{pmatrix} x-3y & x \\ 1 & y \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 6-y \\ 1 & 6-x \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} -4 & 8 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Además: A = B. Calcula 3A + 2C.

11. Si:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 5 & -3 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$$

Calcula $\text{Traz}((AB)^T)$.

UNI

12. Dado el polinomio $f(x) = 2x^2 - 3x + 2$, además:

$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, calcula f(A).

Resolución:

Reemplazando el valor x = A, en el polinomio y el número 2 del polinomio por 2I (I: matriz identidad)

Obtenemos: $f(A) = 2A^2 - 3A + 2I$

Calculando:

$$A^2 = A\bullet A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 6 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$$

Luego:

$$f(A) = 2\begin{pmatrix} 7 & 6 \\ 4 & 7 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$f(A) = \begin{pmatrix} 14 & 12 \\ 8 & 14 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 & -9 \\ -6 & -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\therefore\ f(A) = \begin{pmatrix} 13 & 3 \\ 2 & 13 \end{pmatrix}$$

13. Dado el polinomio $f(x) = x^3 - 3$, además:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$$

Calcula f(A).

14. Dada la siguiente matriz,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Calcula la suma de los elementos de A^{40}.