



Materiales Educativos GRATIS

ALGEBRA

TERCERO

EJERCICIOS DE NÚMEROS COMPLEJOS

UNIDAD IMAGINARIA

El número complejo $(0; 1)$ es la unidad imaginaria; tiene la particular notación $i = (0; 1)$

Teoremas:

$$i^2 = -1; i = (0; 1)$$

Según la notación de Gauss:

$$\sqrt{-1} = i$$

Ejemplos:

$$\begin{aligned} \bullet \quad \sqrt{-4} \cdot \sqrt{-4} &= \sqrt{4(-1)} \cdot \sqrt{4(-1)} \\ &= \sqrt{4} \cdot \sqrt{-1} \cdot \sqrt{4} \cdot \sqrt{-1} \\ &= 2i \cdot 2i \\ &= 4i^2 = -4 \end{aligned}$$

$$\bullet \quad \sqrt{-8} = \sqrt{(8)(-1)} = \sqrt{8} \cdot \sqrt{-1} = 2\sqrt{2}i$$

$$\bullet \quad \sqrt{-3} \cdot \sqrt{-3} = \sqrt{3}i \cdot \sqrt{3}i = 3i^2 = -3$$

Potencias enteras de la unidad imaginaria

- $i^1 = i$
 - $i^2 = -1$
 - $i^3 = -i$
 - $i^4 = 1$
 - $i^5 = i$
 - $i^6 = -1$
 - $i^7 = -i$
 - $i^8 = 1$
 - $i^9 = i$
 - $i^{10} = -1$
 - $i^{11} = -i$
 - $i^{12} = 1$
- etc

Propiedades:

$$i^4 = 1; i^8 = 1; i^{12} = 1$$

Esto implica que la unidad imaginaria elevada a un múltiplo de cuatro es igual a la unidad.

$$a) \quad i^{4k} = 1$$

$$b) \quad i^{4+k} = i^k$$

$$c) \quad i^{4k} + i^{4k+1} + i^{4k+2} + i^{4k+3} = 0$$

Ejemplo

Reduce:

$$i^{87652(87)}$$

Resolución:

$$i^{87652(87)} = i^{4+3} = i^3 = -i$$

$$\begin{array}{r} 87 \overline{) 4} \\ 8 \quad 21 \\ 07 \\ \underline{4} \\ 3 \end{array}$$

Además:

$$\frac{1+i}{1-i} = i$$

$$\frac{1-i}{1+i} = -i$$

$$(1+i)^2 = 2i$$

$$(1-i)^2 = -2i$$

Trabajando en clase

Integral

$$1. \text{ Calcula: } A = \sqrt{-5} \cdot \sqrt{-5} + \sqrt{-3} \cdot \sqrt{-12}$$

$$B = \sqrt{-1} \cdot \sqrt{-16} - \sqrt{-8} \cdot \sqrt{-8}$$

$$2. \text{ Calcula: } A = i^6 + i^4 - i^7 + i^8$$

$$3. \text{ Calcula: } R = i^{26} + i^{37} - i^{44}$$

PUCP

4. Reduce:

$$i^{5678910123}$$

Resolución:

Se toma las dos últimas cifras para saber si es múltiplo de 4:

$$i^{56789101(23)}$$

$$\Rightarrow i^{5678910123} = i^{4k+3}$$

$$\begin{array}{r} 23 \overline{) 4} \\ 20 \quad 5 \\ \underline{3} \end{array}$$

$$\textcircled{3} \rightarrow \text{residuo}$$

$$i^3 = -i$$

5. Reduce:

$$i^{57186}$$

6. Reduce:

$$i^{2^{2^2}}$$

7. Reduce:

$$M = \frac{i^{2321} + i^{409}}{2i^{400} + i^{235}}$$

UNMSM

8. Reduce:

$$R = \left(\frac{1-i}{1+i} \right)^5$$

Resolución:

Se sabe:

$$\frac{1-i}{1+i} = -i$$

En el problema:

$$R = \left(\frac{1-i}{1+i} \right)^5$$

$$R = (-i)^5$$

$$R = (-1)^5 \cdot i^{\overset{0}{4}+1}$$

$$R = -1 \cdot i^1$$

$$\therefore R = -i$$

9. Resuelve:

$$M = \left(\frac{1+i}{1-i} \right)^6$$

10. Halla el valor de:

$$R = i^{5^5 6^5}$$

11. Reduce:

$$M = i^{-234} + i^{-425}$$

UNI

12. Calcula:

$$R = i + i^2 + i^3 + i^4 + \dots + i^{103}$$

Resolución:

Vemos que se forman 25 grupos de 4 y sobran tres:

$$R = \cancel{i + i^2 + i^3 + i^4} + \dots + \cancel{i^{28} + i^{29} + i^{30} + i^{31}} + i^{101} + i^{102} + i^{103}$$

$$R = i^{101} + i^{102} + i^{103}$$

$$R = i + i^2 + i^3$$

$$R = i + (-1) + i$$

$$\therefore R = -1$$

13. Calcula:

$$M = 1 + i + i^2 + i^3 + \dots + i^{106}$$

14. Calcula:

$$M = i^{2!} + i^{3!} + i^{4!} + i^{5!} + \dots + i^{40!}$$