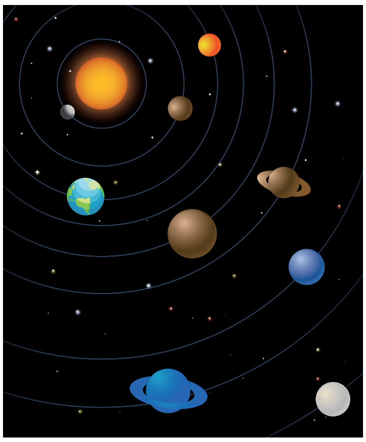
MOVIMIENTO ARMÓNICO SIMPLE I

El MAS es uno de los temas más importantes en la Física, debido a que permite comprender algunos de los movimientos oscilatorios más complejos que se presentan en la naturaleza como movimientos sísmicos, ondas sonoras, movimientos microscópicos, etc.

Conceptos previos

Movimiento periódico:

Es aquel movimiento que se repite en intervalos de tiempos iguales; por ejemplo el movimiento que realiza la Tierra alrededor del Sol.



Movimiento oscilatorio:

También se le denomina movimiento vibratorio o de vaivén. Es aquel movimiento en el que el móvil va y regresa sobre la misma trayectoria en torno a una posición fija de equilibrio; por ejemplo, el movimiento de un reloj de péndulo.

Ciclo:
Se denomina así a cada movimiento repetitivo.

Periodo (T):
Es aquel tiempo que demora un cuerpo en realizar un ciclo. Matemáticamente se define como:

$$T = \frac{\text{Tiempo empleado}}{\text{Número de ciclos}}$$

Donde la unidad de medida en el SI es el segundo (s).

Frecuencia (f):
Se le da este nombre al número de ciclos que acontece por unidad de tiempo. Matemáticamente se define como:

$$f = \frac{\text{Número de ciclos}}{\text{Tiempo total}}$$

Se deduce:

$$f = \frac{1}{T}$$

Donde la unidad de medida en el SI es el Hertz (Hz)

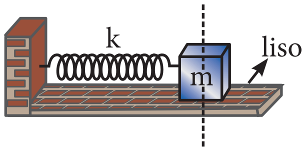
Movimiento Armónico Simple (MAS)
Para que un cuerpo desarrolle un MAS tiene que cumplir con las siguientes condiciones:

- Oscilatorio
- Periódico
- Rectilíneo
- Tiene que existir una fuerza recuperadora que trate de establecer el equilibrio del cuerpo.

El sistema que cumple con las características mencionadas es aquel compuesto por un bloque atado a un resorte, siempre y cuando no se consideren en el sistema fuerzas disipadoras (rozamiento). A este sistema también se le conoce como masa – resorte.

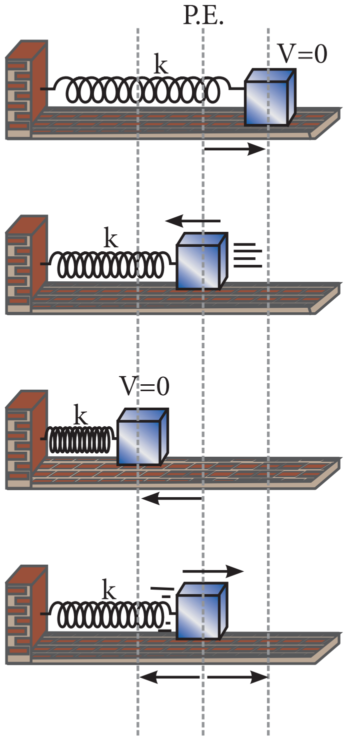
Análisis del MAS

Consideremos el sistema masa-resorte, cuya constante elástica del resorte es k:



Posición de equilibrio (P.E.)

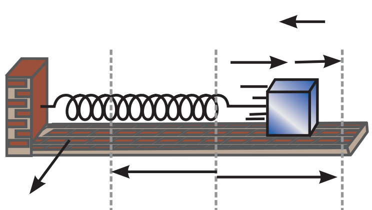
Estiremos el bloque y soltémoslo, en este caso se procederá como se muestra a continuación.



- A es la amplitud y representa la máxima deformación del resorte.
- La velocidad máxima se encuentra en la posición de equilibrio (P.E)
- La aceleración máxima se encuentra en los extremos.

Ecuaciones del MAS

Siguiendo con el análisis del sistema masa-resorte se planteara las ecuaciones del MAS y sus derivados para este sistema.



- Posición

$$x(t) = ASen(\omega t + \varphi)$$

- Velocidad

$$v_{(t)} = A\omega Sen(\omega t + \varphi)$$

- Aceleración

$$a_{(t)} = -A\omega^2 Sen(\omega t + \varphi)$$

Observación:

En las tres ecuaciones anteriores se está asumiendo que las magnitudes físicas tienen signo negativo cuando apuntan hacia la izquierda, y signo positivo cuando apuntan hacia la derecha.

Además se cumple:

- Velocidad máxima: Se genera en la posición de equilibrio. Matemáticamente su valor se calcula mediante la siguiente ecuación:

$$V_{max} = A\omega$$

- Aceleración máxima: Se genera en los extremos cuando la velocidad del móvil es igual a cero. Matemáticamente su valor se calcula aplicando la siguiente ecuación:

$$a_{max} = A\omega^2$$

- Posición inicial: Se calcula haciendo el tiempo igual a cero (t = 0) en la ecuación de posición.

$$x_{(0)} = ASen(\varphi)$$

- Frecuencia angular: su valor se calcula mediante la siguiente ecuación:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$\omega = 2\pi f$$

- Periodo: su valor se calcula mediante la siguiente ecuación:

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

También

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

- Relación entre la rapidez y el valor de la posición en cualquier instante
La rapidez (v) y el valor de la posición(x) en un MAS se relacionan en cualquier instante, mediante la siguiente ecuación:

$$v = \omega\sqrt{A^2 - x^2}$$

- Energía mecánica:
La energía mecánica en todo MAS se conserva, y su valor para este caso se calcula mediante la siguiente ecuación:

$$EM = \frac{1}{2}kA^2$$

Donde las magnitudes y sus respectivas unidades en el SI son:
x: Posición (m)
v: rapidez (m/s)
a: Módulo de la aceleración (m/s^2)
A: Amplitud (m)
ω: Frecuencia angular (rad/s)
t: Tiempo (s)
φ: Fase inicial, es un ángulo que nos indica la posición x donde se empieza a medir el tiempo (rad).
m: masa de bloque unido al resorte (kg)
k : constante elástica del resorte (N/m)

Trabajando en clase

Integral

1. La posición de una partícula con un MAS viene dada por la siguiente ecuación:

$$x_{(t)} = 5Sen\left(\pi t + \frac{\pi}{6}\right)m$$

Donde t se mide en segundos; calcula el periodo (en s) del movimiento.

Resolución:

Aplicando: $T = \frac{2\pi}{\omega}$

Y de la ecuación: $\omega = \pi$ rad/s

$\Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega}$

$\therefore T = 2$ s

2. La posición de una partícula con un MAS viene dada por la siguiente ecuación:

$$x(t) = 6Sen\left(10\pi t + \frac{\pi}{7}\right)m$$

Donde t se mide en segundos. Determina la frecuencia (en Hz) del movimiento.

3. La posición de una partícula con un MAS está dada por la siguiente ecuación:

$$x(t) = 3Sen\left(2\pi t + \frac{\pi}{5}\right)\ m$$

Donde t se mide en segundos. Determina la rapidez máxima (en m/s) y el módulo de la aceleración máxima (en m/s^2)

4. El MAS de una partícula está descrito por la siguiente ecuación:

$$x_{(t)} = 86Sen\left(7\pi t + \frac{\pi}{8}\right)m$$

Donde t se mide en segundos. Calcula $\frac{a_{max}}{v_{max}}$

UNMSM

5. Determina el valor de la posición inicial (en m) de una partícula que desarrolla un MAS descrito por la siguiente ecuación de posición:

$$x_{(t)} = 46Sen\left(9\pi t + \frac{\pi}{6}\right)m$$

Donde t se mide en segundos.

Resolución:

El valor de la posición inicial se calcula aplicando t = 0.

$X_{(0)} = 46\ Sen\left(9\pi(0) + \frac{\pi}{6}\right)m$

$X_{(0)} = 46\ \underbrace{Sen\left(\frac{\pi}{6}\right)}_{1/2}\ m$

$X_{(0)} = 23$ m

6. Calcula el valor de la posición inicial (en m) de una partícula que desarrolla un MAS descrito por la siguiente ecuación de posición:

$$X_{(0)} = 24\text{Sen}\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)\text{m}$$

Donde t se mide en segundos.

7. Se observa que el tiempo que tarda un oscilador armónico en pasar de su posición de equilibrio a la de desplazamiento máximo, es 2 s. ¿Cuál es su periodo?

8. Un carrito de 0,2 kg conectado a un resorte de constante elástica igual a 20,0 N/m oscila sin fricción. Encuentra la máxima rapidez del carro si la amplitud del movimiento es de $3{,}00\times10^{-2}$ m.

UNMSM 2010–I

Resolución:

Aplicando la fórmula:

$V_{Máx} = \omega A$....(1)

Luego determinando ω y A

Del dato: $A = 3{,}00\times10^{-2}$m

Pero: $W = \sqrt{\dfrac{K}{m}}$; para ello del problema reemplazamos los datos:

$$\omega = \sqrt{\frac{20}{0{,}2}}$$

ω = 10rad/s

Luego reemplazando los valores de A y ω en (1)

$V_{Máx} = 10.3.10^{-2}$

$\therefore\ V_{Máx} = 3.10^{-1}$ m/s

9. Un carrito de 8 kg conectado a un resorte de constante elástica igual a 32 N/m oscila sin fricción. Determina el módulo de la velocidad máxima (en m/s) del carrito, si la amplitud del movimiento es de 4 m.

10. Un oscilador armónico simple tarda 12,0 s para experimentar cinco oscilaciones completas, ¿cuál es la frecuencia angular del oscilador?

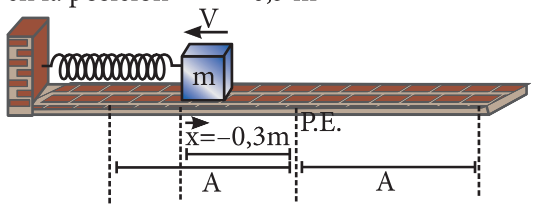
11. Si el módulo de la velocidad máxima de un móvil con MAS es 36 m/s y su frecuencia es 2/π Hz , ¿Cuál es el valor de la amplitud de las oscilaciones en metros?

UNI

12. Un sistema masa-resorte oscila de manera que la posición de la masa está dada por x = 0,5Sen(2πt), donde t se expresa en segundos y x en metros . Calcula la rapidez, en m/s, de la masa cuando x = −0,3m

Resolución:

Sea v la rapidez del cuerpo cuando se encuentra en la posición $\vec{x}$ = – 0,3 m



Para calcular el valor de la velocidad en el punto x = –0,3 m, se puede hacer uso de la siguiente ecuación:

$$\upsilon = \omega\sqrt{A^2 - x^2}$$

Para calcular la rapidez del cuerpo se necesita de algunas magnitudes, las cuales se obtienen a partir de la ecuación de posición que describe el movimiento del cuerpo:

$$\vec{x} = 0{,}5\text{Sen}(2\pi t + 0)\text{m}$$

A partir de esta última se obtienen los siguientes datos:

$$\left.\begin{array}{l} A = 0{,}5\ \text{m} \\ \omega = 2\pi\dfrac{\text{rad}}{\text{s}} \end{array}\right\} .....(II)$$

Luego reemplazamos los datos obtenidos (II) y la posición x = –0,3 m en la ecuación (I)

$$\upsilon = 2\pi\sqrt{(0.5)^2 - (-0.3)^2}$$

$$\therefore\ \upsilon = 0{,}8\pi\ \text{m/s}$$

13. Un sistema masa-resorte oscila de manera que la posición de la masa esta dada por $x(t) = 10\text{Sen}\left(6\omega t + \dfrac{\pi}{4}\right)$m, donde t se mide en segundos. Determina la rapidez (en m/s) de la masa cuando x = 6 m.

14. Un cuerpo describe un MAS siendo su ecuación $x(t) = 25\text{Sen}\left(3\pi t + \dfrac{\pi}{9}\right)$cm, donde t se expresa en segundos. Calcula el módulo de la velocidad del cuerpo (en cm/s) cuando se encuentra a 7 cm de la posición de equilibrio.

15. Un sistema masa-resorte genera un MAS en el que la posición del bloque está dada por la siguiente ecuación:

$$x(t) = 2\text{Sen}(3t + \pi)\ \text{m}$$

Donde t se mide en segundos. Si la masa del bloque es 4 kg, calcula la energía mecánica del sistema (en J)